

Automorphismengruppen und Moduln hyperelliptischer Kurven

von

Wolfgang Ingrisch
aus Nürnberg

*Duss
Erlangen
1905*

1303.105

Automorphismengruppen und Moduln hyperelliptischer Kurven

**Den Naturwissenschaftlichen Fakultäten
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen - Nürnberg**

zur

Erlangung des Doktorgrades

vorgelegt von

Wolfgang Ingrisch

aus Nürnberg

Als Disssertation genehmigt von den Naturwissenschaftlichen
Fakultäten der Universität Erlangen-Nürnberg

Tag der mündlichen Prüfung:

15. November 1985

Vorsitzender der Promotionskommission:

Prof. Dr.K Brodersen

Erstberichterstatte:

Prof. Dr.W.D. Geyer

Zweitberichterstatte:

Prof. Dr.J. Köhn

E i n l e i t u n g

Es sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper und $\text{char } k = 0$.
Eine hyperelliptische Kurve Γ vom Geschlecht g wird durch eine Gleichung

$$y^2 = \prod_{i=1}^m (x - \lambda_i)$$

($\lambda_i \in k$, paarweise verschieden, $m=2g+2$ oder $m=2g+1$) gegeben. Ihr Funktionenkörper K besitzt einen einzigen rationalen Teilkörper $k(x)$ vom Index 2, $K=k(x,y)$ ist charakterisiert durch die Menge M der $2g+1$ Verzweigungspunkte $\lambda_i \in \mathbb{P}_1$ ($i=1, \dots, m$ sowie ∞ falls $m=2g+1$) (vgl. [G], Satz 1 und 2):

- Die birationalen Isomorphieklassen hyperelliptischer Kurven vom Geschlecht g entsprechen bijektiv den $\text{PGL}_2(k)$ -Bahnen in der Menge der $(2g+2)$ -elementigen Teilmengen von $\mathbb{P}_1$.
- Man erhält einen Homomorphismus von der Automorphismengruppe der Kurve nach $\text{PGL}_2(k)$

$$\phi: \text{Aut } \Gamma \longrightarrow \text{PGL}_2(k)$$

mit $\ker \phi = \{\pm 1\} = \text{Gal}(K|k(x))$ und $A := \text{im } \phi = \{s \in \text{PGL}_2(k) \mid s_M = M\}$.

A heißt reduzierte Automorphismengruppe von Γ . Als Teil der Permutationsgruppe S_M von M ist A endlich, als Untergruppe von $\text{PGL}_2(k)$ also eine der Polyedergruppen $\mathbb{Z}_n$, D_n , A_4 , S_4 , A_5 (vgl. [K1], [W]).

Die Operation von A auf der Verzweigungsmenge M ist kanonisch mitgegeben, so daß A im feineren Sinn keine abstrakte Polyedergruppe ist, sondern eine Polyedergruppe mit Permutationsdarstellung

$$A \hookrightarrow S_M.$$

Diese Daten bestimmen bereits die volle Automorphismengruppe $\text{Aut } \Gamma$ (vgl. (3.16)).

Bei Geyer ([G]) wurden u.a. die reduzierten Automorphismengruppen der hyperelliptischen Kurven vom Geschlecht $g=2$ mit Hilfe elementarer Überlegungen bestimmt, entsprechendes wird in [I2] für Geschlecht 3 durchgeführt. Es war ein Ziel der vorliegenden Arbeit, die für gegebenes Geschlecht g auftretenden Automorphismengruppen zu bestimmen. Dazu betrachtet man (notwendigerweise treue) Permutationsdarstellungen von

linearen Polyedergruppen $G \hookrightarrow \text{PGL}_2(k)$ auf der Verzweigungsmenge M von hyperelliptischen Kurven, also Permutationsdarstellungen

$$G \hookrightarrow S_M$$

wobei die Isomorphietypen dieser Permutationsgruppen unterschieden werden. Für die M zugehörige Kurve ist also $G < A$. In Kapitel 3 erhält man Modulräume der Mengen von hyperelliptischen Kurven mit derart gegebenen Gruppenaktionen. Die Nullstellenmenge M weist bei solchen Kurven die durch G bestimmte Symmetrie auf, man fragt, in welchen speziellen Fällen von Kurven eine Symmetriegruppe höherer Ordnung auftritt, wann also die Aktion von G auf M eine Erweiterung erlaubt. Diese Frage wird in Kapitel 4 beantwortet.

(Die Kapitel 1 und 2 stellen eine elementare Einführung dar, in der die Fragestellung der Kapitel 3 und 4 für Kurven mit der Aktion von zyklischen Gruppen und Diedergruppen behandelt wird.)

Ähnliche Ergebnisse enthält eine kürzliche abgefaßte Arbeit von Brandt ([Br]). Er untersucht Kurven mit

$$\text{Gal}(K|k(x)) < \bar{G} < \text{Aut } \Gamma ; \quad \bar{G}/\text{Gal}(K|k(x)) \cong G$$

und gibt Repräsentanten für alle solchen Kurven an. Die Frage nach der Eindeutigkeit dieser Parametrisierung und nach Erweiterungen von G wird dort nicht gestellt.

Der zweite Teil dieser Arbeit beschäftigt sich mit der Modulmannigfaltigkeit hyperelliptischer Kurven. Diese erhält man folgendermaßen: Es bezeichne $n=2g+2$ die Zahl der Verzweigungspunkte einer hyperelliptischen Kurve vom Geschlecht g über $\mathbb{P}_1$. Die birationalen Isomorphieklassen dieser Kurven entsprechen (s.o.) den $\text{PGL}_2(k)$ -Bahnen in der Menge der n -elementigen Teilmengen von $\mathbb{P}_1$. Wird diese mit der Menge R_n^Δ der binären, separablen Formen vom Grad n identifiziert, so erhält man eine $\text{PGL}_2(k)$ -Operation auf R_n^Δ (beschrieben in 3.3), deren Bahnen bijektiv den Isomorphieklassen hyperelliptischer Kurven entsprechen:

$$\begin{array}{ccc} \text{PGL}_2(k) \times R_n^\Delta & \longrightarrow & R_n^\Delta \\ (\gamma, f) & \longmapsto & \gamma_f \end{array}$$

(Die Operation von $\text{PGL}_2(k)$ wird durch die Operation auf den Nullstellen binärer Formen gegeben.). Als Modulmannigfaltigkeit M_k wird der Quotient

$$\pi: R_n \longrightarrow M_k$$

nach dieser $\text{PGL}_2(k)$ -Operation bezeichnet.

$(PGL_2(k))$ ist reduktiv und besitzt nur abgeschlossene Bahnen in R_n^Δ , $[N]$, S.50 u S.110. π ist geometrischer Quotient und $M_k \cong \text{Spm}(J \otimes k)$, wobei J den von Geyer ([G]) konstruierten Ring bedeutet.)

Fischer und Igusa haben für beliebige Charakteristik ($\text{char } k \neq 2$) gezeigt, daß die Singularitäten von M_k im Fall $g \geq 3$ ([F]) genau in den Modulpunkten von Kurven mit nichttrivialer ($\neq \mathbb{Z}_2$) Automorphismengruppe und im Fall $g = 2$ ([I]) genau im Modulpunkt der Kurve $y^2 = x^6 - x$ liegen. Shioda ([S3]) hat den Invariantenring der binären Formen 8. Grades (entsprechend $g=3$) explizit mit Erzeugern und Relationen konstruiert, die Komplexität des Rings läßt es als wenig aussichtsreich erscheinen, auf diese Weise für beliebiges Geschlecht genauere Aussagen über die Modulmannigfaltigkeit zu erreichen. Daher wird diese in der vorliegenden Arbeit mit Hilfe von Luna's ([L]) Methode der étalen Scheiben lokal und nur bis auf étale Morphismen untersucht.

Besonderes Interesse besteht dabei an den Mengen $M(\pi_G)$ der Modulpunkte von Kurven, deren reduzierte Automorphismengruppe A zu einer gegebenen Gruppe G isomorph ist und als Permutationsgruppe auf M vom vorgegebenen Isomorphietyp π_G ist. (Dies bedeutet nach (3.16), daß ihre vollen Automorphismengruppen als abstrakte Gruppen über dem ausgezeichneten Normalteiler $\mathbb{Z}_2 = \text{Gal}(K|k(x))$ isomorph sind.)

Man erhält zunächst die Ergebnisse von Fischer und Igusa, d.h. die Mengen $M(\pi_G)$ enthalten genau die singulären Punkte von M_k . Die hier benutzten Methoden liefern darüber hinaus bis auf einen étalen Morphismus eine Beschreibung dieser Singularitäten als Quotienten linearer Räume nach einer Operation der reduzierten Automorphismengruppe des betrachteten Punkts.

Weiter zeigt sich, in Analogie zu Popp [P], daß die Mengen $M(\pi_G)$ eine Whitney-Stratifikation der Modulmannigfaltigkeit liefern:

Sie sind glatt und in einer Umgebung eines Punktes $x \in M(\pi_G)$ erlaubt M_k bis auf einen étalen Morphismus eine Produktzerlegung

$$M \times L/G \xrightarrow{\sim} M_k \quad (\text{lokal})$$

(wobei M, L lineare Räume sind und die Modulpunkte aus $M(\pi_G)$ genau den Punkten von $M \times \{\bar{0}\}$ entsprechen, $\bar{0}$ bezeichne das Bild des Nullpunkts von L in L/G).

Popp bemerkt in [P] abschließend, daß die irreduziblen Komponenten der Mengen von Modulpunkten mit gegebener Automorphismengruppe Aut Γ eine Stratifikation der von Fischer konstruierten Modulmannigfaltigkeit im Zariski'schen Sinn liefern ($g > 3$). Hier ergibt sich, daß diese

Komponenten genau aus den Modulpunkten von Kurven bestehen, bei denen $\text{Aut } \Gamma$ über dem Normalteiler $\text{Gal}(K|k(x))$ isomorph ist. Diese bilden genau die Mengen $M(\pi_G)$, für die in (7.1) die Irreduzibilität gezeigt wird. Diese ergibt sich zusammen mit der Dimension dieser Mengen aus den Überlegungen des ersten Teils der Arbeit.

Man interessiert sich ferner für den Abschluß der Strata $M(\pi_G)$, es ergibt sich, daß dieser genau aus den Modulpunkten von Kurven besteht, für die die Aktion der reduzierten Automorphismengruppe eine Erweiterung einer Aktion der Gruppe G vom Isomorphietyp π_G ist.

In diesem Zusammenhang ist es trivial, daß der Rand eines Stratums eine endliche Vereinigung von Strata ist (Satz (7.1)).

Ähnlich wie bei den Singularitäten von M_k in den Modulpunkten mit nichtrivialer reduzierter Automorphismengruppe erwartet man Singularitäten des Abschlusses eines Stratums an seinem Rand. Diese werden in Satz (7.5) beschrieben. Mit Ausnahme von Fällen niedriger Kodimension zeigt dieser Satz, daß die Singularitäten am Rand eines Stratums die Struktur der reduzierten Automorphismengruppe des betrachteten Modulpunkts in einfacher Weise widerspiegeln:

Ist x Modulpunkt einer Kurve mit reduzierter Automorphismengruppe A (betrachtet als Permutationsgruppe der Verzweigungsmenge M) und G Untergruppe von A vom Isomorphietyp π_G , so gilt:

x liegt im Rand des Stratums $M(\pi_G)$ und

- $\overline{M(\pi_G)}$ ist im analytischen Sinn lokal reduzibel in x , wenn mehrere Konjugationsklassen von Untergruppen des Isomorphietyps π_G in A existieren.

- $\overline{M(\pi_G)}$ ist in x singular; die Singularität ist normal, wenn G Normalteiler von A ist.

Inhaltsverzeichnis

1. <u>Teil</u> : Die Automorphismengruppen	Seite
1. <u>Kurven mit zyklischen Gruppen $\mathbb{Z}_r < A$</u>	
1.1 Elliptische und hyperbolische Operation von $\mathbb{Z}_r$	1
1.2 Parabolische Operation von $\mathbb{Z}_r$	4
1.3 Erweiterung der $\mathbb{Z}_r$ -Operation auf eine Gruppe $\mathbb{Z}_r > \mathbb{Z}_r$	5
2. <u>Kurven mit Diedergruppen $D_r (r > 2)$</u>	
2.1 Normierte Diedergruppen	7
2.2 Bahnen von Diedergruppen in $\mathbb{P}_1$	8
2.3 Der Fall $r n-1$	9
2.4 Parameterräume für Kurven mit Diedergruppen D_r	9
2.5 Die Kurventypen mit $A > D_r$	10
2.6 Bemerkungen zur Struktur von $T_{\bar{n},r} \bmod \delta_{\bar{n},r}$	13
2.7 Erweiterungen von Gruppenaktionen zu D_r -Aktionen	14
3. <u>Modulräume von Kurven mit Gruppenaktion</u>	
3.1 Normierte Polyedergruppen	19
3.2 Lineare Permutationsdarstellungen der Polyedergruppen und ihre Isomorphietypen	23
3.2.1 Bahnen und Ausnahmehbahnen der normierten Polyedergruppen	23
3.2.2 Die Isomorphietypen der linearen Permutationsgruppen	25
3.3 Invarianten der Bahnen	28
3.3.1 Die binären Polyedergruppen	29
3.3.2 Projektive Invarianten der normierten Polyedergruppen mit Ausnahmehbahnen als Nullstellenmenge	30
3.3.3 Projektive Invarianten vom Grad der Gruppenordnung	33
3.4 Invariantenräume und ihre Beziehungen zu den Isomorphieklassen hyperelliptischer Kurven	36
3.4.1 Invariantenräume	37
3.4.2 Die Invariantenräume $I_n(\pi_G) \bmod \mathcal{M}(q)$ als Modulräume der Kurven mit G-Aktion	41

3.4.3 Die speziellen Invariantenräume	46
4. <u>Degeneration von Symmetrien und Modulprobleme</u>	54
4.1 Beschreibung von $I_n(\pi_G, \pi_{\bar{G}})$ und $I_n(G, \bar{G})$ durch Morphismen von $I_n(\bar{G})$ nach $I_n(G)$	55
4.2 Untergruppen der Polyedergruppen, ihre $\mathcal{N}(G)$ - Konjugationsklassen und Permutationsdarstellungen	59
4.3 Die Mengen $M(\pi_G)$ der Modulpunkte von Kurven, die eine G -Aktion zulassen und Beziehungen zwischen diesen Mengen	69
4.4 Die Mengen $I_n(G, \bar{G})$ und die Fasern der Abbildung $I_n(G) \longrightarrow M_k$	75
4.4.1 Eine explizite Beschreibung der Mengen $I_n(G, \bar{G})$	
4.4.2 Die Fasern der Abbildung $I_n(\pi_G)/\mathcal{N}(G) \longrightarrow M_k$	85
2. <u>Teil</u> : Lokale Untersuchung der Modulmannigfaltigkeit	87
5. <u>Tangential und Normalenraum zur $PGL_2(k)$-Bahn von</u> $\underset{n}{f} \in \underset{n}{R}^{\Delta}$	
5.1 Konstruktion einer Γ_f -stabilen, affinen Umgebung von $\underset{n}{f} \in \underset{n}{R}^{\Delta}$	88
5.2 Tangential und Normalenraum an die Γ -Bahn von f	89
5.3 Die irreduziblen Darstellungen von Γ_f auf dem Normalenraum	90
6. <u>Der étale Morphismus von N/Γ_f nach M_k</u>	103
7. <u>Strukturen der Modulmannigfaltigkeit</u>	108
7.1 Der Satz von Fischer-Igusa	108
7.2 Die Stratifikation der Modulmannigfaltigkeit	110
7.3 Beispiele - Die Umgebung des Modulpunkts der einzigen hyperelliptischen Kurve mit $A=S_4$ in den Fällen $g=2$ und $g=3$	114
7.3.1 Die Lage des Modulpunkts der Kurve mit $A=S_4$ im Abschluß der Strata von Untergruppen in S_4 im Fall $g=2$	114

7.3.2 Der étale Morphismus $N/\Gamma_f \supset U/\Gamma \longrightarrow M_k$ ist kein Isomorphismus	116
7.4 Singularitäten im Abschluß der Strata $M(\pi_G)$	119
7.4.1 Hilfssätze zum Beweis von (7.5)	122
7.4.2 Die Normalteiler von Γ_f - Zum Beweis von (7.5), a)	125
7.4.3 Die Nicht-Normalteiler von Γ_f - Zum Beweis von (7.5)	131
<u>Anhang A</u> - Lokale Eigenschaften der Quotienten der Polynomräume $P_{n,r}$ nach der Operation von G_m bzw. D	144
<u>Anhang B</u> - Einige Quotienten	149
<u>Anhang C</u> - Charaktertafeln der Polyedergruppen A_4, S_4, A_5	153

Verzeichnis von Symbolen und Abkürzungen

$\text{Aut } \Gamma$	i	$R_m(U, V), R_m^\Delta(U, V)$	37
M	i	$S_m(U, V), S_m^\Delta(U, V)$	46
A	i	$A_m(U, V), A_m^\Delta(U, V)$	46
R_n, R_n^Δ	ii	$\hat{R}_m(U, V)$	51
M_k	ii	$\hat{S}_m(U, V)$	51
$\text{PGL}_2(k)$	ii	$\hat{A}_m(U, V)$	51
P_1	i	$I_n(\pi_G, \pi_{\bar{G}})$	54
$Z_r(p)$	1	$I_n(G, \bar{G})$	54
$\bar{M}$	1	$M(\pi_G), \overline{M(\pi_G)}$	69
$\bar{n}$	1	α_8	64
$P_{\bar{n}}, P_{\bar{n}, r}$	2	B_2, B_r, B_r	76
G_m	2	S_6, S_8, S_{12}	76
D	2	S_6', S_8', S_{12}'	76
$\mathcal{J}_r$	5	f', H', T'	76
$\mathcal{Q}_r$	7	$\hat{C}_0, \hat{C}_1, \hat{C}_6$	77
$T_{\bar{n}, r}$	9	f'', H'', T''	77
$\delta_{\bar{n}, r}$	10	$\Gamma = \text{PGL}_2(k)$	88
$D_r(p, q)$	11	Γ_f	88
$\mathcal{V}_4$	20	$[f]$	88
$\mathcal{A}_4$	20	R_n, f	88
$\mathcal{J}_4$	20	L_o	88
$\mathcal{A}_5$	21	$o_f, \hat{o}_f$	89
s, t, u, ω, χ	20	Γ_f	90
T, S, U	21	N, N'	90
$\mathcal{G}, \mathcal{N}(q)$	22	ρ, χ_ρ	94
T_o, T_1	23	ρ_j, ρ_{ij}	96, 97, 99, 101
O, T, K	24	$\Gamma^x \Gamma_f^N$	103
π_G	27	ϕ, ψ	104
$V_4(q)$	27	π_X, π_Y	105
$\alpha_x, \alpha_F, \alpha_Y$	28	ϕ / Γ	106
O_6, C_o, C_1	30	$U, V, U', \bar{U}$	106-107
C	31	V^H	122
f, H, T	32	N_i, W_i	122
$I_n(G), I_n(\pi_G)$	37	U_o	122
		D_k^i	126
		N_o	131

1. Kurven mit zyklischen Gruppen $\mathbb{Z}_r \leq A$

Es sei α ein Automorphismus in $A < \text{PGL}_2(k)$ der Ordnung $r \geq 2$.

Da M abgesehen von den Fixpunkten von α in Bahnen der Länge r zerfällt, muß r ein Teiler von n , $n-1$ oder $n-2$ sein, je nachdem, ob M keinen, einen oder zwei Fixpunkte von α enthält.

Definition (1.1): Die Operation von $\mathbb{Z}_r$ auf M (bzw. die eines Erzeugers α von $\mathbb{Z}_r$) wird als elliptisch, parabolisch oder hyperbolisch bezeichnet, je nachdem, ob 0, 1 oder 2 Fixpunkte von α in M liegen.

Eine solche Permutationsdarstellung von $\mathbb{Z}_r$ in M wird mit $\mathbb{Z}_r(p)$ ($p = 0, 1, 2$) bezeichnet.

Ferner bezeichne s die Zahl der α -Bahnen der Länge r in M und $\bar{n} := rs$ (D.h. $\bar{n} \in \{n, n-1, n-2\}$).

1.1 Elliptische und hyperbolische Operation von $\mathbb{Z}_r$

Die Basiswahl in $\mathbb{P}_1$ kann so erfolgen, daß $0, \infty \in \mathbb{P}_1$ die Fixpunkte von α sind:

$$\alpha: x \longmapsto \xi x \quad (\xi \text{ primitive } r\text{-te Einheitswurzel})$$

M hat dann im elliptischen bzw. hyperbolischen Fall die Form

$$M = \bigcup_{i=1}^s \{a_i, \xi a_i, \dots, \xi^{r-1} a_i\}$$

$$\text{bzw.} \quad M = \{0, \infty\} \cup \bigcup_{i=1}^s \{a_i, \xi a_i, \dots, \xi^{r-1} a_i\}$$

wobei wegen der Separabilität

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & a_i \neq 0, \infty \quad (i=1, \dots, s) \\ \text{(ii)} \quad & a_i^r \neq a_j^r \quad (i \neq j; i, j \in \{1, \dots, s\}) \end{aligned}$$

gelten muß. Da die Anordnung von M nicht wesentlich ist, wird eine Kurve besser durch das normierte Polynom beschrieben, das

$$\bar{M} := M \setminus \{0, \infty\}$$

als Nullstellenmenge besitzt, nämlich

$$Q := \prod_{x_i \in \bar{M}} (X - x_i) = \sum_{i=0}^{\bar{n}} \sigma_i X^{\bar{n}-i} \quad (\bar{n} = |\bar{M}|)$$

(Die σ_i sind die elementarsymmetrischen Polynome in den $x_i \in \bar{M}$, es gelte $\sigma_0 = 1$.)

Q muß separabel sein, also gilt für die Diskriminante $D(Q) \neq 0$. Da $\bar{M}$ in α -Bahnen zerfällt, läßt Q die Substitution $\alpha: x \mapsto \xi x$ zu, d.h. Q ist sogar Polynom in X^r .

Definition (1.2): $P_{\bar{n}}$ bezeichne den $\bar{n}$ -dimensionalen Raum der normierten, separablen Polynome in X vom Grad $\bar{n}$.

($\bar{n} \in \mathbb{N}_0$)

$$P_{\bar{n}} = \{Q = \sum_{i=0}^{\bar{n}} \sigma_i X^{\bar{n}-i} ; \sigma_i \in k, \sigma_0 = 1, D(Q) \neq 0\} \subset k[X]$$

Für Teiler r von $\bar{n}$ sei

$$P_{\bar{n},r} = P_{\bar{n}} \cap k[X^r]$$

Folgerung (1.3) : Es ist $\dim P_{\bar{n},r} = s$ mit $s = \bar{n}r^{-1}$.

Offensichtlich entspricht jedem Element von $P_{\bar{n},r}$ eine Kurve mit $\mathbb{Z}_r$ -Operation. Diese Zuordnung ist nicht eindeutig, mehrere Polynome können zur selben Isomorphieklasse von Kurven gehören:

Die Basis von $\mathbb{P}_1$ wurde durch die Wahl von 0 und ∞ nur bis auf die Operation des Torus

$$G_m = \{x \mapsto cx \mid c \in k^\times\} \simeq k^\times$$

festgelegt. Ferner können die Fixpunkte $0, \infty$ von α noch durch die Involution $x \mapsto x^{-1}$ vertauscht werden. Diese normalisiert G_m , so daß auf $P_{\bar{n},r}$ eine (Dieder-) Gruppe D operiert, deren Wirkung auf $P_{\bar{n},r}$ durch

$$\begin{array}{ccc} \gamma : G_m \times P_{\bar{n},r} & \longrightarrow & P_{\bar{n},r} \\ (c ; \sum_{i=0}^{\bar{n}} \sigma_i X^{\bar{n}-i}) & \longmapsto & \sum_{i=0}^{\bar{n}} \sigma_i c^i X^{\bar{n}-i} \end{array}$$

und

$$\begin{array}{ccc} \tau : P_{\bar{n},r} & \longrightarrow & P_{\bar{n},r} \\ \sum_{i=0}^{\bar{n}} \sigma_i X^{\bar{n}-i} & \longmapsto & \sum_{i=0}^{\bar{n}} \sigma_{\bar{n}-i} \sigma_{\bar{n}}^{-1} X^{\bar{n}-i} \end{array}$$

gegeben wird.

Die Zusammenhangskomponente der Eins D^0 von D ist der Torus G_m , D ist also linear reduktiv und der Quotient von $P_{\bar{n},r}$ nach D existiert. Da $P_{\bar{n},r}$ keine inseparablen Polynome, also auch nicht $X^{\bar{n}}$ enthält, sind alle Bahnen eindimensional und abgeschlossen, der Quotient $P_{\bar{n},r}/D$ ist also sogar geometrischer Quotient. Man erhält:

Satz (1.4): Die hyperelliptischen Kurven mit einer elliptischen ($\bar{n} = n$) oder hyperbolischen ($\bar{n} = n-2$) $\mathbb{Z}_r$ -Operation werden durch $P_{\bar{n},r}/D$ beschrieben.

Es gilt

$$\dim P_{\bar{n},r}/D = s-1 \quad \text{mit } s = \bar{n}r^{-1}$$

Bemerkungen zur Struktur von $P_{\bar{n},r}/D$ und $P_{\bar{n},r}$ (1.5):

$P_{\bar{n},r}$ entsteht aus einem affinen Polynomraum durch Entfernen der Diskriminantenhyperfläche. Die topologische Struktur ist kompliziert, als Fundamentalgruppe erhält man für $k = \mathbb{C}$ die Zopfgruppe $B(\bar{n})$ (vgl. [B]).

Über die Singularitäten von $P_{\bar{n},r}/D$ erhält man ($s = \bar{n}r^{-1}$):

$s > 4$ - $P_{\bar{n},r}/D$ ist genau in den Bildern von Punkten aus $P_{\bar{n},r}$ singular, deren Isotropiegruppe in D größer als $\mathbb{Z}_r$ ist.

$s = 4$ - $P_{\bar{n},r}/D$ ist genau in den Bildpunkten der Polynome

$$X^{\bar{n}} + aX^{3r} + cX^r + 1 \quad (a^2 + c^2 = 0)$$

singular.

$s = 3$ - $P_{\bar{n},r}$ ist dreidimensional, die G_m -Bahnen sind kubische Normalkurven. Schreibt man $Q \in P_{\bar{n},r}$ in der Form

$$Q = X^{\bar{n}} + aX^{2r} + bX^r + c \quad (c \neq 0)$$

so erhält man die D-Invarianten $U = a^3c^{-1} + b^3c^{-2}$ und $W = abc^{-1}$ als Erzeugende des Invariantenrings und als Quotientenabbildung

$$\begin{aligned} P_{\bar{n},r} &\longrightarrow A^2 \setminus \sqrt{(4U - W^2 - 18W + 27)} \\ (a, b, c) &\longmapsto (U, V) \end{aligned}$$

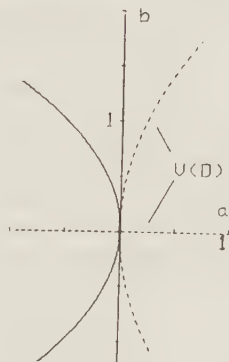
$s = 2$ - $P_{\bar{n},r}$ ist zweidimensional,

$$P_{\bar{n},r} = \{X^{\bar{n}} + aX^r + b \mid a, b \in k, b \neq 0, a^2 - 4b \neq 0\}$$

Die G_m -Bahnen sind Parabeln (vgl.

Skizze), die Diskriminantenhyperfläche zerfällt in $b=0$ und $a^2 - 4b=0$

Die D-Invariante $U = a^2b^{-1}$ liefert als Quotienten $k \setminus \{4\}$.



Beweis:

Die obigen Aussagen ergeben sich aus den Lemmata (A.3) und (B.1) sowie aus A.6, wobei noch zu beachten ist, daß $P_{\bar{n},r}$ keine inseparablen Polynome enthält. Im Fall $s=3$ liefert dies die Bedingung $4U-W^2-18W+27 \neq 0$, im Fall $s=2$ die Bedingung $U \neq 4$.

1.2 Parabolische Operation von $\mathbb{Z}_r$

Die Basiswahl kann wie in 1.1 erfolgen. Bezeichnet man den in M liegenden Fixpunkt mit 0, so hat M die Form

$$M = \{0\} \cup \bigcup_{i=1}^s \{a_i, \xi a_i, \dots, \xi^{r-1} a_i\}$$

(ξ sei wieder eine primitive r -te Einheitswurzel.)

wobei wieder (i) $a_i \neq 0$, ($i=1, \dots, s$)
(ii) $a_i \neq a_j$ ($i \neq j, i, j \in \{1, \dots, s\}$)

gelten muß. Ebenso wie in 1.1 erhält man Parameterräume $P_{\bar{n},r}$, allerdings entfällt jetzt die Operation τ auf $P_{\bar{n},r}$, da die Wahl der Fixpunkte eindeutig ist. Dies ergibt:

Satz (1.6): Die hyperelliptischen Kurven mit einer parabolischen $\mathbb{Z}_r$ -Operation werden durch $P_{\bar{n},r}/G_m$ ($\bar{n} = n-1$) beschrieben. Es gilt:

$$\dim P_{\bar{n},r}/G_m = s-1 \quad (\text{mit } s = \bar{n}r^{-1})$$

Bemerkung zur Struktur von $P_{\bar{n},r}/G_m$ (1.7):

$P_{\bar{n},r}/G_m$ ist für $s \geq 3$ genau in den Bildern von Punkten aus $P_{\bar{n},r}$ singulär, deren Isotropiegruppe in G_m größer als $\mathbb{Z}_r$ ist. Im Fall $s=2$ ist $P_{\bar{n},r}/G_m$ glatt.

Beweis:

Ergibt sich aus Lemma (A.3) und A.6.

Beispiel (1.8):

$s=3$: $P_{\bar{n},r} = \{Q = X^{\bar{n}} + aX^{2r} + bX^r + c \mid a, b, c \in k; c \neq 0; D(Q) \neq 0\}$

Aus dem Beweis von Lemma (B.1) ergibt sich, daß

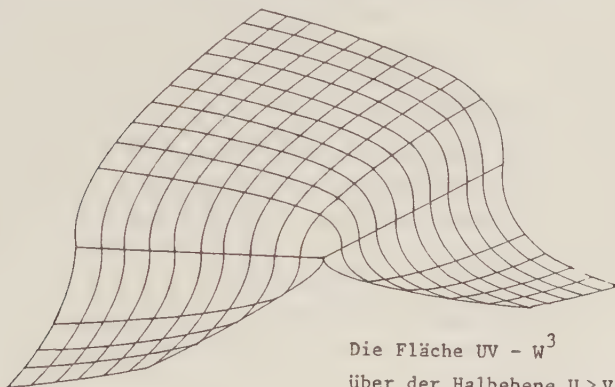
$$U = \frac{a^3}{c}, \quad V = \frac{b^3}{c^2}, \quad W = \frac{ab}{c}$$

Erzeugende des Invariantenrings von G_m sind. Das

Bild der Quotientenabbildung ist also die Fläche

$$UV - W^3 = 0$$

Deren Singularität ist das Bild der Bahn des Polynoms X^{n+1} , mit der zyklischen Gruppe Z_n als Isotropiegruppe.



Die Fläche $UV - W^3$
über der Halbebene $U > V$

1.3 Erweiterung der Z_r -Operation auf eine Gruppe $Z_{\bar{r}} > Z_r$

Es ist zu klären, für welche Punkte $Q \in P_{n,r}$ die Gruppe Z_r zu $Z_{\bar{r}} > Z_r$ erweitert werden kann.

Definition (1.9): Die Gruppe $\mathcal{J}_r = \langle x \mapsto \xi x \rangle$ (ξ primitive r -te Einheitswurzel) wird im folgenden als normierte zyklische Gruppe der Ordnung r bezeichnet.

Durch $Q \in P_{n,r}$ sei eine Kurve mit Z_r -Operation gegeben. Wenn diese zu einer $Z_{\bar{r}}$ -Operation fortgesetzt werden kann, ist jedes Element von $Z_{\bar{r}}$ Potenz eines Erzeugers von $Z_{\bar{r}}$. Die Fixpunkte der Erzeuger von $Z_{\bar{r}}$ bzw. Z_r stimmen demnach überein. Eine Erweiterung der $\mathcal{J}_r$ -Operation führt also zu $\mathcal{J}_{\bar{r}}$. Ferner sind die Permutationsdarstellungen beider Gruppen vom gleichen Typ und die Nullstellenmenge M von Q zerfällt in Bahnen von

$$\mathcal{J}_{\bar{r}} = \langle x \mapsto \zeta x \rangle \quad (\zeta \text{ primitive } \bar{r}\text{-te Einheitswurzel})$$

Dies zeigt den folgenden Satz.

Satz (1.10): Eine $\mathbb{Z}_r$ -Operation auf einer hyperelliptischen Kurve, beschrieben durch $Q \in P_{\bar{n}, r}$, läßt sich genau dann zu einer $\mathbb{Z}_{\bar{r}}$ -Operation mit $\mathbb{Z}_{\bar{r}} > \mathbb{Z}_r$ erweitern, wenn die Bahn von Q in $P_{\bar{n}, \bar{r}}$ liegt. Die Fortsetzung ist eindeutig, der Typ der zyklischen Gruppe bleibt erhalten.

2. Kurven mit Diedergruppen D_r ($r > 2$)

(D_r bezeichne im folgenden immer eine Diedergruppe der Ordnung $2r$.)

2.1 Normierte Diedergruppen

Es sei $r \geq 3$ und $D_r = \langle \alpha, t \rangle \subset \text{PGL}_2(k)$, $\text{ord } \alpha = r$, $t^2 = 1$, $\alpha^t = \alpha^{-1}$.

Dann kann wie in 1.) die Basis von P_1 so gewählt werden, daß α die Form

$$\alpha: x \mapsto \xi x \quad (\xi \text{ r-te primitive Einheitswurzel})$$

hat. t normalisiert $\langle \alpha \rangle$, läßt also die Fixpunkte von α fest oder permutiert sie. Im ersten Fall wäre $t(x) = -x$, d.h. t würde mit α kommutieren. Dies ist unmöglich, weil $\text{ord } \alpha \geq 3$ angenommen wird. Also vertauscht t die Punkte $0, \infty$:

$$t: x \mapsto c^2 x^{-1} \quad (c \in k^*).$$

Durch einen Basiswechsel $x \mapsto \pm c^{-1} x$ aus G_m erreicht man

$$t: x \mapsto x^{-1}.$$

Definition (2.1): Die Untergruppe $\mathcal{D}_r$ von $\text{PGL}_2(k)$ mit den Erzeugern

$$\alpha: x \mapsto \xi x \text{ und } t: x \mapsto x^{-1} \text{ wird als normierte}$$

Diedergruppe (der Ordnung $2r$) bezeichnet.

Die Auswahl der Erzeuger α und t in $\mathcal{D}_r$ (d.h. die Basiswahl in P_1) ist nicht eindeutig, es müssen zwei Fälle unterschieden werden.

i) r ungerade:

Die Auswahl der Involution t aus $\mathcal{D}_r$ spielt keine Rolle, weil alle Involutionen in D_r konjugiert sind. Vertauschung der Fixpunkte ± 1 von t entspricht dem Basiswechsel

$$x \mapsto -x$$

Dieser kann, weil $x \mapsto \xi x$ in A liegt, durch

$$x \mapsto -\xi x$$

ersetzt werden. ($-\xi$ ist eine primitive $2r$ -te Einheitswurzel.)

ii) r gerade:

Die Vertauschung der Fixpunkte von t durch $\alpha^{r/2}: x \mapsto -x$ ist jetzt in A enthalten, allerdings existieren jetzt zwei D_r -Konjugationsklassen von nichtzentralen Involutionen. Wird der Repräsentant αt der zweiten Konjugationsklasse statt t gewählt, so erhält man die Fixpunkte $\pm \rho$ statt ± 1 , wobei ρ eine primitive

2r-te Einheitswurzel ist. Der zugehörige Basiswechsel ist also

$$x \rightarrow \rho x.$$

Man erhält also

Satz (2.2): a) Alle Diedergruppen D_r in $PGL_2(k)$ sind konjugiert zu

$$\mathcal{D}_r.$$

b) Die Wahl der Erzeuger von $\mathcal{D}_r$ ist eindeutig (modulo Basiswechsel aus $\mathcal{D}_r$ selbst) bis auf Basistransformationen

$$x \mapsto \rho x$$

(ρ 2r-te primitive Einheitswurzel).

c) Für $r \geq 3$ ist der Normalisator von $\mathcal{D}_r < PGL_2(k)$ die Diedergruppe $\mathcal{D}_{2r}$.

Beweis:

a) und b) wurden oben gezeigt, c) ist nur eine andere Formulierung von b).

2.2 Bahnen von Diedergruppen in $\mathbb{P}_1$

Satz (2.3): Diedergruppen D_r ($r > 2$) besitzen in $\mathbb{P}_1$ eine Bahn der Länge 2, zwei Bahnen der Länge r und im übrigen Bahnen der Länge 2r. Die Ausnahmeh Bahnen der normierten Diedergruppe $\mathcal{D}_r$ haben die Form

$$\{0, \infty\}, \{1, \xi, \dots, \xi^{r-1}\}, \{\rho, \rho\xi, \dots, \rho\xi^{r-1}\}$$

(mit $\rho^2 = \xi, \xi$ primitive 2r-te Einheitswurzel).

Beweis:

Es sei o.E. $\mathcal{D}_r$ gewählt. t operiert auf den α -Bahnen, die mit Ausnahme von $\{0\}, \{\infty\}$ die Länge r haben. Die Ausnahmeh Bahnen $\{0\}, \{\infty\}$ ergeben die $\mathcal{D}_r$ -Bahn $\{0, \infty\}$. Die $\mathcal{D}_r$ -Bahnen der Länge r sind die α -Bahnen, die von t festgelassen werden. Für ein Element $a \in \mathbb{P}_1$ einer solchen Bahn gilt: Es existiert $v \in \{0, 1, \dots, r-1\}$ so, daß

$$t(a) = \alpha^v(a)$$

Daraus folgt

$$a^{-1} = \xi^v a$$

bzw.

$$a^{2r} = 1$$

a ist also 2r-te Einheitswurzel. Die Menge dieser Einheitswurzeln zerfällt in die beiden genannten Bahnen.

Bemerkung (2.4): Bei ungeradem r liegt in jeder der beiden Ausnahmebahnen der Länge r je ein Fixpunkt der Involutionen α^i_t ($i=0,1,\dots,r-1$). Ist r gerade, so bilden jeweils alle Fixpunkte der Elemente einer Konjugationsklasse solcher Involutionen eine solche Ausnahmebahn.

2.3 Der Fall $r|n-1$

Es gelte $A \geq D_r > Z_r = \langle \alpha \rangle$. Dann liegt genau ein Fixpunkt von α in M (vgl. Vorbemerkung zu (1.1)). Eine α invertierende Involution müßte die Fixpunkte von α tauschen, könnte M also nicht permutieren.

Satz (2.5): Ist $A \geq Z_r$ und $r|n-1$ ($r > 2$), so liegt Z_r nicht innerhalb einer Diedergruppe von A , d.h. eine zyklische Untergruppe $Z_r < D_r \leq A$ operiert immer elliptisch oder hyperbolisch.

2.4 Parameterräume für Kurven mit Diedergruppen D_r ($r > 2, r|n$ oder $r|n-2$)

s bezeichne die Zahl der Bahnen von $\langle \alpha \rangle = Z_r < D_r \leq A$. Es bezeichne wieder $\bar{M} = M \setminus \{0, \infty\}$ und $\bar{n} = |\bar{M}| = rs$.

Lemma (2.6): Für das einer Kurve mit der Operation von $\bar{D}_r > Z_r$ nach 1.1 zugeordnete Polynom $Q \in P_{\bar{n},r}$ erhält man

$$(1) \quad \sigma_{\bar{n}} = 1 \text{ und } \sigma_{\bar{n}-i} = \sigma_i \quad (i=1, \dots, \bar{n}-1)$$

oder

$$(2) \quad \sigma_{\bar{n}} = -1 \text{ und } \sigma_{\bar{n}-i} = -\sigma_i \quad (i=1, \dots, \bar{n}-1)$$

Beweis:

Die Operation von t auf $P_{\bar{n},r}$ ist in 1.1 als τ beschrieben. Invarianz von $Q=(\sigma_i)$ liefert

$$(*) \quad \sigma_i = \sigma_{\bar{n}-i} \sigma_{\bar{n}}^{-1} \quad (i=0,1,\dots,\bar{n}; \sigma_0=1)$$

$i = \bar{n}$ liefert die Gleichung $\sigma_{\bar{n}}^2 = 1$, also $\sigma_{\bar{n}} = \pm 1$. Einsetzen dieser Werte in $(*)$ ergibt die Behauptung des Lemmas.

Definition (2.7): Die Teilräume von $P_{\bar{n},r}$, die durch die linearen Gleichungen (1) bzw. (2) von Lemma (2.6) bestimmt werden, werden mit $T_{\bar{n},r}^+$ bzw. $T_{\bar{n},r}^-$ bezeichnet ($r|\bar{n}$, $r \geq 2$). Ferner sei:

$$T_{\bar{n},r} = T_{\bar{n},r}^+ \cup T_{\bar{n},r}^-$$

In Umkehrung von Lemma (2.6) sieht man, daß die Nullstellenmenge aller Polynome aus $T_{\bar{n},r}$ die Involution t zuläßt, diesen entsprechen also Kurven mit Diedergruppen D_r . Diese Kurven werden dadurch allerdings noch nicht eindeutig parametrisiert, weil gemäß Satz (2.2) der Normalisator $\bar{D}_{2r}$ auf $T_{\bar{n},r}$ operiert und Punkte identifiziert, die isomorphen Kurven entsprechen.

Satz (2.8): Die folgende Involution $\delta_{\bar{n},r}$ identifiziert in $T_{\bar{n},r}$ Punkte, die zu isomorphen Kurven gehören:

$$\begin{array}{ccc} \delta_{\bar{n},r}: T_{\bar{n},r} & \longrightarrow & T_{\bar{n},r} \\ \sum_{i=0}^{\bar{n}} \sigma_i X_i^{\bar{n}-i} & \longmapsto & \sum_{i=0}^{\bar{n}} \sigma_i (-1)^{i/r} X_i^{\bar{n}-i} \end{array}$$

Es gilt:

- Falls $s = \bar{n}r^{-1}$ ungerade ist, bewirkt $\delta_{\bar{n},r}$ eine Bijektion zwischen $T_{\bar{n},r}^+$ und $T_{\bar{n},r}^-$.
- Falls s gerade ist, induziert $\delta_{\bar{n},r}$ eine Involution auf jedem der Räume $T_{\bar{n},r}^\pm$.

Beweis: Die Wahl der normierten Gruppe $\bar{D}_r$ entspricht nach (2.2) einer Basiswahl in $\mathbb{P}_1$, die bis auf die Abbildung $x \mapsto \rho x$ (ρ $2r$ -te primitive Einheitswurzel) eindeutig bestimmt ist.

Diese induziert auf $T_{\bar{n},r}$ die Abbildung

$$\sum_{i=0}^{\bar{n}} \sigma_i X_i^{\bar{n}-i} \rightarrow \sum_{i=0}^{\bar{n}} \sigma_i \rho^i X_i^{\bar{n}-i}$$

(vgl. 1.1). Falls r Teiler von i ist, ergibt sich $\rho^i = (-1)^{r/i}$, für andere Werte von i ist $\sigma_i = 0$. Es gilt

$$(-1)^{\bar{n}/r} \sigma_{\bar{n}} = (-1)^s \sigma_{\bar{n}},$$

d.h. das Vorzeichen des letzten Koeffizienten wechselt genau dann, wenn s ungerade ist. Dies ergibt a) und b).

2.5 Die Kurventypen mit $A \geq D_r$ ($r > 2$)

Die Darstellungen von D_r auf M unterscheiden sich durch die Zahl der zwei- bzw. r -elementigen Ausnahmebahnen. In Satz (3.7) wird gezeigt, daß der Isomorphietyp der Permutationsdarstellung durch diese Zahlen eindeutig bestimmt ist. Dies rechtfertigt die folgende Definition.

Definition (2.9): $D_r(p, q)$ bezeichne eine Permutationsdarstellung von D_r auf M , bei der p die Zahl der Fixpunkte von $Z_r < D_r$ und q die Zahl der r -elementigen Ausnahmebahnen von D_r in M ist.

Das Auftreten der Typen von Permutationsdarstellungen hängt von $s = \bar{n}r^{-1}$ ab.

a) s ungerade:

$\bar{M}$ muß eine Ausnahmebahn der Länge r enthalten. Also gilt

$$\bar{M} = \{1, \xi, \dots, \xi^{r-1}\} \cup \bigcup_{i=1}^{(s-1):2} \{a_i, \xi a_i, \dots, \xi^{r-1} a_i, a_i^{-1}, \dots, \xi^{r-1} a_i^{-1}\}$$

oder

$$\bar{M} = \{\rho, \rho\xi, \dots, \rho\xi^{r-1}\} \cup \bigcup_{i=1}^{(s-1):2} \{a_i, \xi a_i, \dots, \xi^{r-1} a_i, a_i^{-1}, \dots, \xi^{r-1} a_i^{-1}\}$$

(Mit ρ wie oben, $\rho^2 = \xi$, $a_i \in P_1$ für $i=1, \dots, \frac{s-1}{2}$, so daß $a_i^{2r} \neq 0, 1$,

und die Bahnen der a_i paarweise verschieden und von der Länge $2r$ sind. Letzteres ist äquivalent zu $a_i^r + a_i^{-r} \neq \pm 2$.)

Die beiden möglichen Formen von $\bar{M}$ werden offensichtlich durch den Basiswechsel $x \mapsto \rho x$ vertauscht.

Mit $\mu_i := a_i^r + a_i^{-r}$ ($\mu_i \in k^x$, $\mu_i \neq \pm 2$) erhält man für das M zugeordnete Polynom

$$Q = (X^r - 1) \prod_{i=1}^{(s-1):2} (X^{2r - \mu_i} X^r + 1)$$

bzw.

$$Q = (X^r + 1) \prod_{i=1}^{(s-1):2} (X^{2r - \mu_i} X^r + 1)$$

Am letzten Koeffizienten sieht man, daß Q im ersten Fall in $T_{\bar{n}, r}^-$, im zweiten Fall in $T_{\bar{n}, r}^+$ liegt. Dies entspricht der Beobachtung, daß $\delta_{\bar{n}, r}$ für ungerade s eine Bijektion zwischen $T_{\bar{n}, r}^+$ und $T_{\bar{n}, r}^-$ liefert (vgl. (2.8)). Zusammengefaßt ergibt dies:

Satz (2.10): Für ungerades $s = \bar{n}r^{-1}$ ist die Permutationsdarstellung von D_r festgelegt, sie ist vom Typ $D_r(p, 1)$ ($p \in \{0, 2\}$). Die hyperelliptischen Kurven mit D_r -Operation werden durch jeden der beiden $\frac{s-1}{2}$ -dimensionalen Räume $T_{\bar{n}, r}^\pm$ beschrieben.

Beweis:

Die Aussage über die Dimension ergibt sich aus der Darstellung von M . Alles andere wurde schon gezeigt.

b) s gerade - M enthalte keine Ausnahmebahn der Länge r

Dann hat $\bar{M}$ die Form

$$\bar{M} = \bigcup_{i=1}^{s/2} \{a_i, \xi a_i, \dots, \xi^{r-1} a_i, a_i^{-1}, \xi a_i^{-1}, \dots, \xi^{r-1} a_i^{-1}\}$$

(Mit entsprechenden Voraussetzungen über ξ und $a_i \in \mathbb{P}_1$ wie in a).)

Mit den gleichen Bezeichnungen wie in a) ergibt sich

$$Q = \prod_{i=1}^{s/2} (X^{2r} - \mu_i X^r + 1)$$

Der letzte Koeffizient zeigt, daß Q in $T_{n,r}^+$ liegt. Damit erhält man

Satz (2.11): Ist $s = nr^{-1}$ ungerade, so werden die Kurven mit Diedergruppen des Typs $D_r(p, 0)$ ($p \in \{0, 2\}$) durch den Raum $T_{n,r}^+ \bmod \delta_{n,r}$ beschrieben. Die Dimension der Kurvenschar ist $s:2$.

Es ist noch zu zeigen, daß jedes Polynom $Q \in T_{n,r}^+$ nicht nur D_r zuläßt (Dies erkennt man am Beweis von (2.6),) sondern Kurven dieses Typs liefert. Würden 2 Ausnahmebahnen der Länge r auftreten, so wäre Q durch $X^{2r}-1$ teilbar, da die übrigen Bahnen jeweils Faktoren $X^{2r}-\mu_i X^r+1$ liefern, wäre der letzte Koeffizient -1 . Die Dimension ergibt sich anhand der Darstellung von $\bar{M}$.

c) s gerade - M enthalte 2 Ausnahmebahnen der Länge r

$\bar{M}$ hat die Darstellung

$$\bar{M} = \{1, \xi, \dots, \xi^{r-1}\} \cup \{\rho, \rho\xi, \dots, \rho\xi^{r-1}\} \cup \bigcup_{i=1}^{s/2-1} \{a_i, \xi a_i, \dots, \xi^{r-1} a_i, a_i^{-1}, \dots, \xi^{r-1} a_i^{-1}\}$$

(Bezeichnungen und Voraussetzungen wie in a).) Es ergibt sich wie oben

$$Q = (X^{2r}-1) \prod_{i=1}^{s/2-1} (X^{2r}-\mu_i X^r+1).$$

Q liegt also in $T_{n,r}^-$. Anhand der Überlegungen aus a) und b) folgt:

Satz (2.12): Ist $s = nr^{-1}$ gerade, so werden die Kurven mit Diedergruppen des Typs $D_r(p, 2)$ ($p \in \{0, 2\}$) durch den Raum $T_{n,r}^- \bmod \delta_{n,r}$ eindeutig beschrieben. Die Dimension der Kurvenschar ist $\frac{s}{2} - 1$.

2.6 Bemerkungen zur Struktur von $T_{\bar{n},r} \bmod \delta_{\bar{n},r}$

Nach den Ergebnissen aus 2.5 braucht dieser Quotient nur betrachtet zu werden, wenn $s=\bar{n}r^{-1}$ gerade ist. Die folgenden Überlegungen schließen auch den bisher nicht betrachteten Fall $s=2$ mit ein.

$\delta_{\bar{n},r}$ ist eine lineare Involution, die das Vorzeichen von Koeffizienten vor ungeraden Potenzen von X^r umkehrt (vgl. (2.8)). Mit den Abkürzungen $Y=X^r$ und $s'=s:2$ gilt:

$$T_{\bar{n},r}^+ = \{Q=(Y^s+1) + \sum_{i=1}^{s'} a_i (Y^{s-i} + Y^i) \mid Q \in P_{\bar{n},r}\}$$

$$T_{\bar{n},r}^- = \{Q=(Y^s-1) + \sum_{i=1}^{s'} a_i (Y^{s-i} - Y^i) \mid Q \in P_{\bar{n},r}\}$$

(Diese Darstellungen ergeben sich aufgrund von Lemma (2.6), dieses zeigt auch, daß der Summand $Y^{s'}$ bei $Q \in T_{\bar{n},r}^-$ entfällt.)

Bezüglich dieser Schreibweise wird $\delta_{\bar{n},r}$ durch eine Diagonalmatrix dargestellt, die alternierend aus +1 und -1 besteht:

$$\left(\begin{array}{cccc} -1 & & & \\ & +1 & & \\ & & -1 & \\ & & & \ddots \end{array} \right) \left. \vphantom{\begin{array}{c} -1 \\ +1 \\ -1 \\ \ddots \end{array}} \right\} s' \text{ bzw. } s'-1 \text{ für } T_{\bar{n},r}^+ \text{ bzw. } T_{\bar{n},r}^-$$

$\delta_{\bar{n},r}$ ist also genau dann Spiegelung, wenn

$$s' \leq 2, \text{ also } \frac{\bar{n}}{r} \leq 4 \quad (\text{für die Operation auf } T_{\bar{n},r}^+)$$

$$s'-1 \leq 2, \quad " \quad \frac{\bar{n}}{r} \leq 6 \quad (" " " " T_{\bar{n},r}^-)$$

Satz (2.12): Wenn $s=\bar{n}r^{-1}$ gerade ist, ist die Fixpunktmenge von $\delta_{\bar{n},r}$ in $T_{\bar{n},r}$ genau der Raum $T_{\bar{n},2r}$.

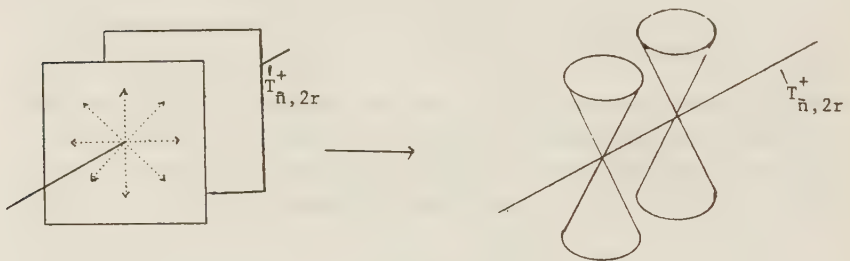
Beweis: Dies ergibt sich unmittelbar aus der obigen Darstellung von $\delta_{\bar{n},r}$.

Satz (2.13): Die Quotienten $T_{\bar{n},r}^+ / \langle \delta_{\bar{n},r} \rangle$ bzw. $T_{\bar{n},r}^- / \langle \delta_{\bar{n},r} \rangle$ sind glatt, wenn $\bar{n} \leq 4r$ bzw. $\bar{n} \leq 6r$ ist. In allen anderen Fällen sind die Singularitäten genau die Bildpunkte von $T_{\bar{n},2r}$.

Beweis: Die erste Behauptung ergibt sich aus den obigen Überlegungen mit Hilfe des Satzes von Shephard-Todd ([S2], S.76). Zum Beweis der zweiten Behauptung betrachtet man die isotypische Zerlegung von $T_{\bar{n},r}^+$.

Zur trivialen Darstellung von $\mathbb{Z}_2 = \langle \delta_{\bar{n},r} \rangle$ gehört der Summand $T_{\bar{n},2r}$, der zweite Summand mit der Darstellung $(-1) \cdot \text{Id}$ werde mit S bezeichnet. $S/\mathbb{Z}_2$ hat als einzige Singularität den Punkt O . Der singuläre Ort von $T_{\bar{n},r}^+$ ist also $T_{\bar{n},2r}^+$, wenn die Dimension von S größer als 1 ist.

Beispiel (2.14): $\delta_{\bar{n},r}$ operiert auf $T_{\bar{n},r}^+$ im Fall $\frac{\bar{n}}{r} = 6$ folgendermaßen: Der Eigenwert 1 tritt einmal, der Eigenwert -1 zweimal auf. Dies ergibt den Quotienten:



2.7 Erweiterungen von Gruppenaktionen zu D_r -Aktionen

a) Erweiterung einer $\mathbb{Z}_r$ -Aktion

Es ist festzustellen, welche Polynome aus Parameterräumen $P_{\bar{n},r}$ zu Kurven gehören, die sogar Diedergruppen zulassen. Dies ist nach 2.3 nur bei Kurven mit hyperbolischer oder elliptischer $\mathbb{Z}_r$ -Operation möglich (also wenn $r|\bar{n}$ oder $r|\bar{n}-2$).

In diesem Fall kann man, von einer normierten Gruppe $\mathcal{J}_r$ ausgehend, gemäß 2.1 durch einen Basiswechsel aus G_m eine normierte Diedergruppe erreichen. Dies ergibt:

Satz (2.15): Eine hyperelliptische Kurve mit $\mathbb{Z}_r$ -Aktion vom hyperbolischen oder elliptischen Typ, die durch ein Polynom $Q \in P_{\bar{n},r}$ repräsentiert wird, läßt genau dann eine Diedergruppe ($A \geq D_r \supset \mathbb{Z}_r$) zu, wenn die G_m -Bahn von Q den Raum $T_{\bar{n},r}$ schneidet.
Die Involution τ bildet die G_m -Bahn von Q in diesem Fall auf sich selbst ab.

Beweis:

Zur ersten Behauptung ist nur noch zu bemerken, daß die Zulässigkeit einer normierten Diedergruppe für ein Element von $P_{\bar{n},r}$ nach (2.6) die Zugehörigkeit zu $T_{\bar{n},r}$ bedeutet. Die letzte Behauptung ergibt sich, weil die Punkte von $T_{\bar{n},r}$ genau die Fixpunkte von τ sind und τ die G_m -Operation normalisiert.

Bemerkung (2.6):

- a) $P_{\bar{n},r}/D$ ist für $s > 4$ in den Bildpunkten von $T_{\bar{n},r}$ singulär.
- b) Der singuläre Ort von $P_{\bar{n},r}/D$ im Fall $s=4$ entspricht genau den Diedergruppen vom Typ $D_r(p,2)$.
- c) Die Singularitäten aus b) stimmen bis auf einen étalen Morphismus lokal mit dem Quotienten von A^3 nach der Gruppe

$$Z_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

überein. (Vgl. Skizze zu Beispiel (2.14)).

Beweis:

- α) Ergibt sich aus (1.5), weil die Isotropiegruppe von Punkten aus $T_{\bar{n},r}$ mindestens $\langle \tau \rangle$
- β) Für $\bar{n}=4r$ sind die singulären Punkte von $P_{\bar{n},r}/D$ gemäß (1.5) die Bildpunkte der Polynome

$$Q = X^{\bar{n}} + aX^{3r} + cX^r + 1 \quad (a^2 + c^2 = 1)$$

Es gelte $a=ic$ (i primitive 4. Einheitswurzel). Der Basiswechsel $x \mapsto \lambda x$ (mit $\lambda^{2r}=i$) überführt Q in

$$\begin{aligned} Q' &= X^{\bar{n}} + \lambda^r a X^{3r} + \lambda^{3r} c X^r + \lambda^{4r} = \\ &= X^{\bar{n}} + \lambda^r a X^{3r} - \lambda^r i c X^r - 1. \end{aligned}$$

Also ist $Q' \in T_{\bar{n},r}^-$. Q repräsentiert also eine Kurve mit einer Diedergruppe vom Typ $D_r(p,2)$.

- γ) A.6 reduziert den Beweis auf die Betrachtung von P_4/D . Die Behauptung ergibt sich dann aus dem Beweis von Lemma (A.3), wobei die Zahl der Eigenwerte der Involution aus A.3 zu entnehmen ist.

b) Erweiterung einer D_r -Aktion auf $D_r > D_r$

$Q \in T_{\bar{n},r}$ repräsentiere eine Kurve mit $D_r \geq A$. Es ist zu klären, in welchen Fällen A sogar eine Diedergruppe $D_{\bar{r}} > D_r$ ($r|\bar{r}$) enthält. Weil

$r > 2$ vorausgesetzt wird, ist die Lage von D_r in $D_{\bar{r}} (r|\bar{r})$ eindeutig:
 Der Erzeuger von $Z_r < D_r$ ist Potenz eines Erzeugers von $Z_{\bar{r}} < D_{\bar{r}}$. Insbesondere sind die beiden maximalen zyklischen Gruppen vom selben Typ (vgl. 1.3) und mit D_r liegt auch $D_{\bar{r}}$ in normierter Form vor.
 D.h. Q liegt sogar in $T_{\bar{n}, \bar{r}}$.

Satz (2.17): Eine D_r -Operation auf einer hyperelliptischen Kurve, beschrieben durch $Q \in T_{\bar{n}, r}$, läßt sich genau dann zu einer Operation von $D_{\bar{r}} > D_r$ erweitern, wenn

$$Q \in T_{\bar{n}, \bar{r}} \subset T_{\bar{n}, r}$$

ist.

Interessanter ist die Frage, wie sich die Permutationsdarstellungen bei Erweiterungen verhalten. Dies kann man entweder an der Parameter-
 räumen $T_{\bar{n}, r}^+$ und den zugehörigen Identifikationen oder direkt an den Verzweigungsmengen ablesen. Da sich der Typ der maximalen zyklischen Untergruppe (gegeben durch p) nicht ändern kann, kommt es hier nur auf die r -elementigen Ausnahmebahnen an:

i) Erweiterung einer $D_r(p, 1)$:

Das Auftreten von genau einer Ausnahmebahn der Länge r bedeutet, daß die Zahl der nichtausgearteten Z_r -Bahnen in M ungerade ist. Für $Z_{\bar{r}} > Z_r$ ist diese Zahl $\bar{s}$ ein Teiler von s , also ebenfalls ungerade, weil jede nicht ausgeartete $Z_{\bar{r}}$ -Bahn die gleiche Zahl von Z_r -Bahnen enthält. Die D_r -Operation muß also auch vom Typ $D_r(p, 1)$ sein.

ii) Erweiterung von $D_r(p, 0)$:

Weil M keine D_r -Ausnahmebahn enthält, muß $1 \notin M$ sein. Dies bedeutet, daß mindestens eine $D_{\bar{r}}$ -Ausnahmebahn der Länge $\bar{r}$ nicht in M enthalten sein kann. Die $D_{\bar{r}}$ -Darstellung $D_{\bar{r}}(p, 2)$ kann also nicht vorkommen. Die beiden anderen Typen treten auf, je nachdem, ob $\bar{s} = \frac{\bar{n}}{\bar{r}}$ gerade oder ungerade ist. Man sieht dies, wenn man beobachtet, wie die Bahnen von $D_{\bar{r}}$ in Bahnen der Untergruppen D_r zerfallen.

iii) Erweiterung von $D_r(p, 2)$:

Mit der analogen Argumentation wie in ii) sieht man, daß nur Erweiterungen von $D_r(p, 2)$ zu $D_r(p, 1)$ oder $D_r(p, 2)$ auftreten (je nachdem, ob $\bar{s} = \bar{n}:\bar{r}$ gerade oder ungerade ist.)

Satz (2.18): Eine D_r -Operation kann in folgender Weise zu einer $D_{\bar{r}}$ -Operation erweitert werden:

(Es gelte: $r|\bar{r}$, $\bar{r}|\bar{n}$, $\bar{n} = n-p$, $p \in \{0,2\}$)

a) $D_r(p,1) < D_{\bar{r}}(p,1)$

b) Für $q \in \{0,2\}$:

$$D_r(p,q) < D_{\bar{r}}(p,\bar{q}) \quad \text{mit} \quad \begin{cases} \bar{q} = q & \text{falls } \frac{\bar{n}}{r} \text{ gerade} \\ \bar{q} = 1 & \text{" } \frac{\bar{n}}{r} \text{ ungerade} \end{cases}$$

Der Beweis wurde oben geführt.

Weil die Räume $T_{\bar{n},r}$ ($r|\bar{n}$, $\bar{n}$ fest, gleich $n-2$ oder n) eine absteigende Kette bilden, wird man nach den Zusammenhängen zwischen den Involuntionen $\delta_{\bar{n},r}$ fragen. Es gilt

Satz (2.19): $\delta_{\bar{n},r}$ und $\delta_{\bar{n},\bar{r}}$ stimmen auf $T_{\bar{n},\bar{r}}$ genau dann überein, wenn der Index $r:\bar{r}$ ungerade ist.

Ist er gerade, so operiert $\delta_{\bar{n},r}$ trivial auf $T_{\bar{n},\bar{r}}$.

(Als zusätzliche Identifikation auf $T_{\bar{n},\bar{r}}$ tritt dann $\delta_{\bar{n},\bar{r}}$ auf.)

Beweis: Es sei $Q \in T_{\bar{n},\bar{r}}$, also

$$(*) \quad Q = \sum_{i=0}^{\bar{n}} \sigma_i X^{\bar{n}-i} \quad (\sigma_i = 0 \text{ falls } \bar{r} \nmid i)$$

Es gilt
$$\delta_{\bar{n},r}(Q) = \sum_{i=0}^{\bar{n}} \sigma_i (-1)^{i/r} X^{\bar{n}-i}$$

$$\delta_{\bar{n},\bar{r}}(Q) = \sum_{i=0}^{\bar{n}} \sigma_i (-1)^{i/\bar{r}} X^{\bar{n}-i} \quad (\text{wohldefiniert wegen } (*))$$

Man sieht, daß beide Abbildungen bei ungeradem Index übereinstimmen, und daß $\delta_{\bar{n},r}$ bei geradem Index trivial ist.

Bemerkung: $\delta_{\bar{n},\bar{r}}$ wird von $(x \mapsto \rho x)$ induziert ($\rho^2 = \xi$, und $x \mapsto \xi x$ ein Erzeuger von $\mathbb{Z}_r < D_r$), einem Automorphismus von $D_{\bar{r}}$, der die beiden Konjugationsklassen von Untergruppen D_r von geradem Index in $D_{\bar{r}}$ vertauscht.

Die Ergebnisse von Satz (2.8) sowie (2.19) werden durch folgendes Beispiel veranschaulicht:

Beispiel (2.21): Ist $n=2r$ und schreibt man $Y=X^r$ so folgt:

$$T_{6r,r}^+ = \{ Q=(Y^6+1)+a(Y^5+Y)+b(Y^4+Y^2)+cY^3 \mid Q \in k[X]_{\text{separabel}} \}$$

$$T_{6r,r}^- = \{ Q=(Y^6-1)+a(Y^5-Y)+b(Y^4-Y^2) \mid Q \in k[X]_{\text{separabel}} \}$$

$$T_{6r,2r}^+ = \{ Q=(Y^6+1)+b(Y^4+Y^2) \mid Q \in k[X]_{\text{separabel}} \}$$

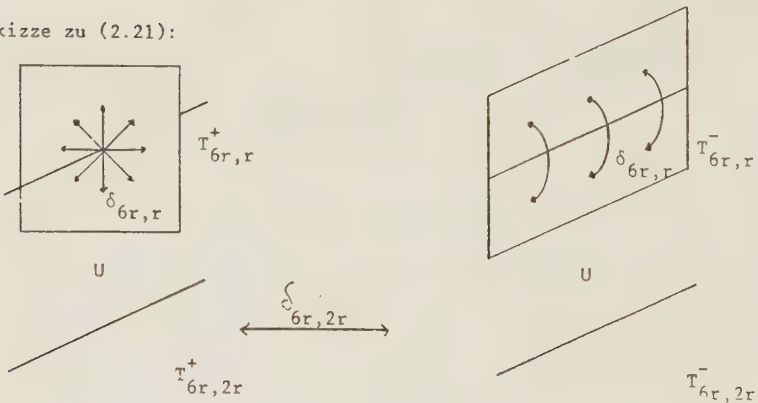
$$T_{6r,2r}^- = \{ Q=(Y^6-1)+b(Y^4+Y^2) \mid Q \in k[X]_{\text{separabel}} \}$$

$\delta_{6r,r}$ wird durch $(a,b,c) \mapsto (-a,b,-c)$ beschrieben,

$\delta_{6r,2r}$ identifiziert $T_{6r,2r}^+$ mit $T_{6r,2r}^-$ vermöge $b \mapsto b$.

(Vgl. Skizze)

Skizze zu (2.21):



3. Modulräume von Kurven mit Gruppenaktion

In diesem Abschnitt sollen die Techniken aus den Kapiteln 1 und 2 zur Behandlung der unübersichtlicheren Situationen bei den verbleibenden Gruppen systematisiert werden. Zunächst werden spezielle Repräsentanten der Polyedergruppen von $PGL_2(k)$ und deren Permutationsdarstellungen auf endlichen Teilmengen von P_1 bestimmt. Dies führt zu einer Parametrisierung der Isomorphieklassen von Kurven, deren Verzweigungsmengen bestimmte Permutationsgruppen zulassen.

3.1. Normierte Polyedergruppen

Zu jeder Konjugationsklasse von Polyedergruppen in $PGL_2(k)$ soll ein möglichst überschaubarer Repräsentant gesucht werden. Isomorphieklassen (abstrakter) Gruppen werden im folgenden in Druckschrift geschrieben, spezielle Repräsentanten in $PGL_2(k)$ in Schreibschrift.

Als Normalisator einer Gruppe wird der Normalisator in $PGL_2(k)$ bezeichnet.

3.1.1 Zyklische Gruppen Z_r ($r \geq 2$)

Nach 1.1 ist jede Gruppe $Z_r < PGL_2(k)$ zu

$$Z_r := \langle x \mapsto \xi x \rangle \quad (\xi \text{ primitive } r\text{-te Einheitswurzel})$$

konjugiert. Der Normalisator von Z_r ist die Gruppe $D = \langle x \mapsto cx ; x \mapsto x^{-1} \rangle$ ($c \in k^\times$).

3.1.2 Diedergruppen D_r ($r \geq 3$)

Nach 2.1 ist jede Diedergruppe D_r in $PGL_2(k)$ konjugiert zu

$$D_r := \langle x \mapsto \xi x ; x \mapsto x^{-1} \rangle \quad (\xi \text{ primitive } r\text{-te Einheitswurzel})$$

Satz (2.2) zeigt, daß der Normalisator $\mathcal{N}(D_r)$ in $PGL_2(k)$ die Gruppe

$$D_{2r} = \langle x \mapsto \rho x ; x \mapsto x^{-1} \rangle \quad (\rho^2 = \xi)$$

ist.

3.1.3 Die Klein'sche Vierergruppe V_4

Wie bei den Diedergruppen stellt man fest, daß jede Vierergruppe in $PGL_2(k)$

zu

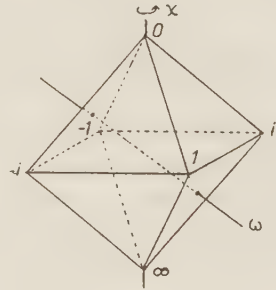
$$\mathcal{V}_4 := \langle x \mapsto -x; x \mapsto x^{-1} \rangle$$

konjugiert ist. Wegen der höheren Symmetrie ist der Normalisator hier allerdings nicht $\mathcal{D}_4$ sondern größer. Die Fixpunkte der Involutionen bilden das Oktaeder

$$O := \{0, \infty, +1, -1, i, -i\}$$

Dessen Symmetriegruppe in SO_3 ist die von $s: x \mapsto -x$, $t: x \mapsto x^{-1}$, $u: x \mapsto -x^{-1}$ und $\omega: x \mapsto i(x+1)(x-1)^{-1}$, $\chi: x \mapsto ix$ erzeugte Oktaedergruppe. ω entspricht einer 120° -Drehung um eine der dreizähligen Oktaederachsen, χ einer Vierteldrehung um die Achse $0-\infty$.

$\mathcal{V}_4$ wird offensichtlich von $\mathcal{J}_4 := \langle s, t, \omega, \chi \rangle$ normalisiert. Weil der Zentralisator von $\mathcal{V}_4$ in $PGL_2(k)$ mit $\mathcal{V}_4$ identisch ist und bereits $\mathcal{J}_4$ die vollständige Permutationsgruppe S_3 auf den Involutionen von $\mathcal{V}_4$ induziert, muß der Normalisator von $\mathcal{V}_4$ in $PGL_2(k)$ mit $\mathcal{J}_4$ identisch sein.



Lemma (3.1) : a) Der Normalisator von $\mathcal{V}_4$ in $PGL_2(k)$ ist die Oktaedergruppe $\mathcal{J}_4$.
b) $\mathcal{V}_4$ und ω zusammen erzeugen eine Tetraedergruppe

$$\mathcal{A}_4 := \langle s, t, \omega \rangle$$

3.1.4 Tetraedergruppe und Oktaedergruppe

Lemma (3.2) : a) Jede Tetraedergruppe bzw. Oktaedergruppe in $PGL_2(k)$ ist konjugiert zu $\mathcal{A}_4$ bzw. $\mathcal{J}_4$ (vgl. 3.1.3)

b) Der Normalisator dieser beiden Gruppen ist $\mathcal{J}_4$.

Beweis: Es sei G eine beliebige Tetraeder- oder Oktaedergruppe in $PGL_2(k)$. Weil alle Vierergruppen in $PGL_2(k)$ zu $\mathcal{V}_4$ konjugiert sind, darf angenommen werden, daß G als Normalteiler $\mathcal{V}_4$ enthält. Also ist G im Normalisator $\mathcal{J}_4$ von $\mathcal{V}_4$ enthalten und daher identisch mit $\mathcal{A}_4$ bzw. $\mathcal{J}_4$.

3.1.5 Die Ikosaedergruppe A_5

Lemma (3.3) : $S, U \in A_5$ mit $S^5 = U^2 = 1$ seien Erzeugende einer Diedergruppe D_5 in A_5 . Dann existiert genau eine Involution $T \in A_5$, die mit U kommutiert und für die $\text{ord}(T \cdot S) = 3$ ist.

Es gilt $\langle S, T, U \rangle = A_5$.

Beweis: Man betrachte eine Darstellung von A_5 als Permutationsgruppe auf 5 Elementen. O.E. darf

$$S=(12345) \text{ und } U=(25)(34)$$

angenommen werden. Dann kommutieren nur $(23)(54)$ und $(24)(53)$ mit U und nur für $T=(23)(54)$ gilt

$$(T \cdot S)^3 = \text{Id}$$

Ist $G < \text{PGL}_2(k)$ eine Ikosaedergruppe, so erreicht man durch Konjugation, daß

$$\mathcal{D}_5 = \langle S: x \rightarrow \epsilon x, U: x \rightarrow x^{-1} \rangle \quad (\epsilon \text{ primitive 5. Einheitswurzel})$$

in G enthalten ist. Eine Involution von G mit den Eigenschaften des obigen Lemmas muß die Fixpunkte von U vertauschen, woraus sich

$$T: x \mapsto \frac{-ax + 1}{-x + a} \quad (a \in k \setminus \{1\})$$

ergibt. Aus der Bedingung $(T \cdot S)^3 = \text{Id}$ folgt die Gleichung

$$a^2 = (i(\epsilon^2 + \epsilon^3))^2.$$

Man erhält zwei Lösungen

$$T: x \mapsto \frac{(\epsilon^2 + \epsilon^3)x + i}{-ix - (\epsilon^2 + \epsilon^3)} \quad \text{und} \quad T': x \mapsto \frac{(\epsilon^2 + \epsilon^3)x - i}{ix - (\epsilon^2 + \epsilon^3)},$$

die vermöge $x \mapsto -x$ konjugiert sind. Daraus erhält man

Lemma (3.4) : a) Alle Ikosaedergruppen in $\text{PGL}_2(k)$ sind zu

$$\mathcal{A}_5 := \langle S, T, U \rangle$$

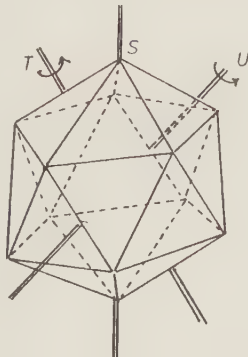
konjugiert.

b) Der Normalisator von $\mathcal{A}_5$ in $\text{PGL}_2(k)$ ist mit $\mathcal{A}_5$ identisch.

c) Jede Diedergruppe D_5 von $\text{PGL}_2(k)$ ist in genau zwei Ikosaedergruppen enthalten, die durch den Normalisator von D_5 in $\text{PGL}_2(k)$ vertauscht werden.

Beweis: a) und c) ergeben sich aus den obigen Überlegungen.

zu b): Der Normalisator von $\mathcal{A}_5$ operiert auf den Fixpunktpaaren der Elemente der Ordnung 5, muß also selbst eine Polyedergruppe sein.



Bemerkung zu (3.4): Die hier angegebene Ikosaedergruppe $\mathcal{I}_5$ stimmt mit der bei Klein [K₁, S.39] bis auf eine Drehung des Koordinatensystems durch $x \mapsto ix$ überein.

3.1.6 Normierte Polyedergruppen

Definition (3.5): Die in 3.1.1 bis 3.1.5 angegebenen Repräsentanten der Konjugationsklassen von Polyedergruppen in $\text{PGL}_2(k)$ werden als normierte Polyedergruppen bezeichnet. Ist G eine Polyedergruppe, so bezeichne Q im folgenden den zugehörigen normierten Repräsentanten und $\mathcal{N}(Q)$ seinen Normalisator in $\text{PGL}_2(k)$.

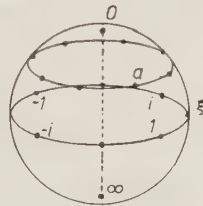
3.2 Lineare Permutationsdarstellungen der Polyedergruppen und ihre Isomorphietypen

Zur Untersuchung der Permutationsdarstellungen der reduzierten Automorphismengruppen hyperelliptischer Kurven auf der Verzweigungsmenge M ist es nötig, zunächst die Ausnahmebahnen der Gruppen, d.h. die Bahnen festzustellen, deren Länge ein echter Teiler der Gruppenordnung ist. Dies führt zur Klassifikation der Permutationsdarstellungen von Polyedergruppen auf den Verzweigungsmengen.

3.2.1 Bahnen und Ausnahmebahnen der normierten Polyedergruppen

3.2.1.1 Zyklische Gruppen

Die allgemeine Bahn von $\mathfrak{J}_r$ ist $\{a, \xi a, \xi^2 a, \dots, \xi^{r-1} a\}$ ($a \in k^\times$). Ausnahmebahnen werden von den Punkten $\{0\}$, $\{\infty\}$ gebildet.



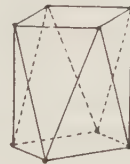
Bahnen von $\mathfrak{J}_8$

3.2.1.2 Diedergruppen und Vierergruppe

Die Ausnahmebahnen der Diedergruppe $\mathcal{D}_r$ wurden in Satz (2.3) bestimmt: $\{0, \infty\}$, $\{1, \xi, \dots, \xi^{r-1}\}$, $\{\rho, \rho\xi, \dots, \rho\xi^{r-1}\}$.

Die allgemeine Bahn ist von der Form $\{a, \xi a, \dots, \xi^{r-1} a, a^{-1}, a^{-1}\xi, \dots, a^{-1}\xi^{r-1}\}$ ($a \in k^\times$).

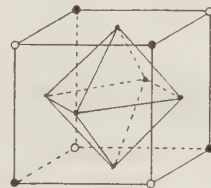
Im Sonderfall $\mathcal{U}_4$ bilden die drei Ausnahmebahnen (bestehend aus den Fixpunktpaaren der Involutionen) das Oktaeder $O = \{0, \infty, 1, -1, i, -i\}$. Die allgemeine Bahn ist $\{\pm a, \pm a^{-1}\}$ ($a \in k^\times$).



Antiprisma als allgemeine $\mathcal{D}_4$ -Bahn

3.2.1.3 Die Tetraedergruppe

Die Fixpunkte der Involutionen von $\mathcal{A}_4$ bilden die in 3.1.3 als Oktaeder O bezeichnete $\mathcal{A}_4$ -Bahn. Die Fixpunkte von ω liegen in zwei Bahnen der Länge 4, die als Tetraeder



Ausnahmehbahnen von $\mathcal{A}_4$

$T_0 = \{\pm 0, 5 \cdot (1+i)(1+\sqrt{3}); \pm 0, 5(1-i)(1-\sqrt{3})\}$
und $T_1 = \{\pm 0, 5 \cdot (1-i)(1+\sqrt{3}); \pm 0, 5(1+i)(1-\sqrt{3})\}$
bezeichnet werden.

Bemerkung (3.6): Die bei den zyklischen Gruppen, den Diedergruppen, der Vierergruppe und der Tetraedergruppe auftretenden Bahnen gleicher Länge werden durch die Operation des Normalisators jeweils vertauscht.

Beweis:

- a) Die beiden Ausnahmebahnen der Diedergruppe werden durch $x \mapsto \rho x$ (vgl. 3.1.2) vertauscht.
- b) Die Ausnahmebahnen $\{0, \infty\}$, $\{\pm 1\}$, $\{\pm i\}$ der Vierergruppe $\mathcal{V}_4$ werden durch ω zyklisch vertauscht.
- c) Die Tetraeder T_0 und T_1 der Tetraedergruppe $\mathcal{A}_4$ werden durch $\chi: x \mapsto ix$ vertauscht.
- d) Die Ausnahmebahnen $\{0\}$, $\{\infty\}$ von $\mathcal{P}_4$ werden durch $x \mapsto x^{-1}$ vertauscht.

3.2.1.4 Die Oktaedergruppe $\mathcal{S}_4$

Ausnahmebahnen werden gebildet von

- a) den Fixpunkten der Elemente der Ordnung 4:
Sie sind identisch mit den Fixpunkten der Involutionen des Normalteilers $\mathcal{V}_4$ und ergeben das Oktaeder O .
- b) den Fixpunkten der Elemente der Ordnung 3:
Dies sind die Elemente der Tetraeder T_0 und T_1 (vgl. 3.2.1.3), die durch $\chi \in \mathcal{P}_4$ vertauscht werden. Es bezeichne

$$T = T_0 \cup T_1$$

die S_4 -Bahn. Es gilt also $|T| = 8$, T kann als Würfel aufgefaßt werden.

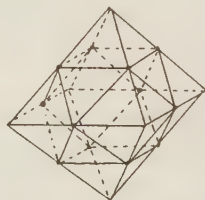
- c) den Fixpunkten der nicht in $\mathcal{V}_4$ enthaltenen Involutionen in $\mathcal{P}_4$:
Dies sind die "Kantenhalbierungspunkte" des Oktaeders O , die die Ecken eines Kuboktaeders bilden. Vier der Kantenhalbierungspunkte sind die Fixpunkte der Involutionen $x \mapsto \pm ix^{-1}$ von $\mathcal{P}_4$: $\{\xi, \xi^3, \xi^5, \xi^7\}$ ($\xi^2 = i$). Die Bilder dieser Menge unter den 120° -Drehungen ω und ω^2 ergeben die $\mathcal{S}_4$ -Bahn K der Kantenhalbierungspunkte:

$$K = \{\xi, \xi^3, \xi^5, \xi^7\} \cup \{\xi, \xi^3, \xi^5, \xi^7\}^\omega \cup \{\xi, \xi^3, \xi^5, \xi^7\}^{\omega^2}$$

3.2.1.5 Die Ikosaedergruppe $\mathcal{A}_5$

Zu den Ausnahmebahnen von $\mathcal{A}_5$ gehört die Menge der Fixpunkte der fünfzähligen Elemente von $\mathcal{A}_5$:

$$\{0, \infty, i\varepsilon^v(\varepsilon + \varepsilon^4), i\varepsilon^v(\varepsilon^2 + \varepsilon^3) \mid v=0,1,2,3,4\}$$



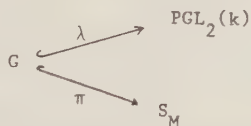
Oktaeder und Kuboktaeder

Diese 12 Punkte bilden ein Ikosaeder auf der Riemann'schen Zahlenkugel.

Die übrigen Ausnahmepunkte werden im folgenden nicht explizit benötigt, sie bestehen aus den 20 "Flächenmittelpunkten" und den 30 "Kantenhalbierungspunkten" dieses Ikosaeders, nämlich aus den Fixpunkten der Elemente der Ordnung 3 bzw. 2 der Ikosaedergruppe. Die ersten bilden ein Dodekaeder, die zweiten ein Ikosidodekaeder der Riemann'schen Zahlenkugel.

3.2.2 Die Isomorphietypen der linearen Permutationsgruppen

Eine lineare Permutationsgruppe (G, π) auf $M \subset \mathbb{P}_1(k)$ ist eine Gruppe G zusammen mit zwei Einbettungen π, λ in die symmetrische Gruppe S_M von M und in $\text{PGL}_2(k)$, so daß die Bilder $\pi(g)$ für alle $g \in G$ von den $\lambda(g)$ auf M induziert werden:



Wegen $|M| \geq 3$ ist λ dann durch π bereits eindeutig bestimmt.

In diesem Sinn ist die reduzierte Automorphismengruppe einer hyperelliptischen Kurve und jede ihrer Untergruppen in natürlicher Weise lineare Permutationsgruppe auf der Menge der Verzweigungspunkte.

Zwei lineare Permutationsgruppen G_1, G_2 auf $M_1, M_2 \subset \mathbb{P}_1$ sind isomorph, wenn eine (abstrakte) Bijektion

$$\phi_M: M_1 \rightarrow M_2$$

und ein Isomorphismus ϕ_G existieren, so daß das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccc} G_1 & \xrightarrow{\phi_G} & G_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ S_{M_1} & \xrightarrow{\phi_M^*} & S_{M_2} \end{array} \quad (\phi_M^* \text{ induziert von } \phi_M)$$

Wenn ϕ_M sogar linear ($\in \text{PGL}_2(k)$) gewählt werden kann, sind sogar die zugehörigen Kurven isomorph, umgekehrt bestimmt ein Isomorphismus von zwei hyperelliptischen Kurven eine lineare Bijektion ϕ_M .

Klassifikation der transitiven linearen Permutationsgruppen:

In 3.1 und 3.2.1 wurde gezeigt, daß es folgende Isomorphieklassen transitiver Permutationsgruppen gibt:

- a) Die reguläre Darstellung auf der Standardbahn (Länge=Gruppenordnung).
- b) Die Darstellungen auf den Ausnahmebahnen. Nach Bemerkung (3.6) sind die Darstellungen auf verschiedenen Ausnahmebahnen gleicher Länge isomorph.

Dies führt zu

Satz (3.7) : Die Längen der auftretenden Ausnahmebahnen in M (mit ihrer Vielfachheit) bestimmen den Isomorphietyp einer linearen Permutationsgruppe.

Beweis: Ist $\pi: G \longrightarrow S_M$ eine lineare Permutationsgruppe und

$$M = \bigcup_{i \in I} M_i$$

die Zerlegung in Bahnen, so wird der Isomorphietyp von π durch die Isomorphietypen der induzierten Abbildungen $G \longrightarrow S_{M_i}$ bestimmt.

Zusammengefaßt erhält man aus 3.2.1 folgende Tabelle der Bahnlängen:

<u>Bahnlängen der Polyedergruppen in P_1</u>		
G	Standardbahn	Ausnahmebahnen
Z_r ¹⁾	r	1 , 1
D_r ²⁾	2r	2 , r , r
V_4	4	2 , 2 , 2
A_4	12	4 , 4 , 6
S_4	24	6 , 8 , 12
A_5	60	12 , 20 , 30
¹⁾ $r \geq 2$ ²⁾ $r \geq 3$		

Satz (3.7) liefert nun die vorkommenden Isomorphietypen linearer Permutationsgruppen, wenn man die möglichen Zerlegungen von $n \in 2 \cdot \mathbb{N}$ in Bahnlängen untersucht. Die möglichen Isomorphietypen und ihre Bezeichnungen werden in der folgenden Tabelle zusammengefaßt:

Tabelle der Isomorphietypen linearer Permutationsgruppen		
G	Bezeichnung der Isomorphietypen π_G	Bedingung für das Auftreten von π_G ($n \in 2N$)
Z_r	$Z_r(p)$ $p \in \{0,1,2\}$: Anzahl der Ausnahmebahnen	$n - p \equiv 0(r)$
D_r	$D_r(p,q)$ $p \in \{0,2\}$: Anzahl der Ausnahmebahnen von $Z_r < D_r$ $q \in \{0,1,2\}$: Anzahl der r-elementigen Ausnahmebahnen	$n - p - qr \equiv 0(2r)$
V_4	$V_4(q)$ $q \in \{0,1,2,3\}$:Anzahl der 2-elementigen Ausnahmebahnen	$n - 2q \equiv 0(4)$
A_4	genauso bezeichnet, der Typ ist durch n eindeutig bestimmt. ¹⁾	keine weitere Bedingung
S_4		$n \neq 4(6)$
A_5		$n \equiv 0,2,12,20 \ (30)$
¹⁾ Begründung: Die Zerlegung von $n \in 2N$ in Summanden von der Länge der Bahnen, mit einfachem Auftreten der Ausnahmebahnen, ist offensichtlich eindeutig.		

3.3 Invarianten der Bahnen

Es bezeichne R_n den projektiven Raum der binären Formen n-ten Grades. $PGL_2(k)$ operiert auf R_n , die Operation wird von $GL_2(k)$ induziert: Die Automorphismen aus $PGL_2(k)$ operieren auf $\mathbb{P}_1$ vermöge

$$x \longmapsto \alpha x$$

mit $x = [x_1, x_2] \in \mathbb{P}_1$, $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PGL_2(k)$ und $\alpha x = [ax_1 + bx_2, cx_1 + dx_2]$.

Die Operation auf R_n wird durch die Operation auf den Nullstellen der binären Formen definiert:

$$f \longmapsto \alpha f = f(\alpha^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix})$$

αf geht also durch die Substitution

$$X \longrightarrow dX - bY, Y \longrightarrow -cX + aY$$

aus f hervor und es gilt:

$$\alpha(\beta f) = \alpha\beta f$$

Die Konjugation $\alpha\alpha^{-1}$ in $PGL_2(k)$ wird α_γ geschrieben, so daß die Fixgruppe von αf die Konjugierte αG der Fixgruppe G von f ist.

Ist $G \subset PGL_2(k)$ eine endliche Gruppe, so wird ihr Urbild $\tilde{G} \subset SL_2(k)$ als binäre Polyedergruppe bezeichnet ([S2], S.86 ff).

Definition (3.8) : Eine Form $f \in R_n$ heißt (projektive) Invariante einer endlichen Gruppe $G \in PGL_2(k)$, wenn f eine Semiinvariante der zugehörigen binären Gruppe G ist:

$$\alpha f = \chi(\alpha) \cdot f \quad (\alpha \in \tilde{G}; \chi(\alpha) \in k, \chi \text{ Charakter von } \tilde{G})$$

Beispiel: Die Formen $f \in R_n$, deren Nullstellenmengen aus der Bahn einer Polyedergruppe bestehen (vgl. 3.2.1) sind G -Invarianten.

Zur Berechnung der projektiven Invarianten einer endlichen Gruppe $G \subset PGL_2(k)$ kann man den bei Klein beschriebenen Weg gehen ([K1], S.47 ff.). Dort werden zunächst die Invarianten ("Grundformen") berechnet, die eine Ausnahmebahn von G als Nullstellenmenge besitzen, Invarianten beliebiger Bahnen erhält man als Linearkombinationen dieser "Grundformen". Zu diesem Zweck sollen zunächst die binären Polyedergruppen bestimmt werden, die die normierten Polyedergruppen in $PGL_2(k)$ überlagern.

3.3.1 Die binären Polyedergruppen

- a) Das Urbild der zyklischen Gruppe $\mathcal{J}_r$ in $SL_2(k)$ ist die zyklische Gruppe

$$\left\langle \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \bar{\rho} \end{pmatrix} \right\rangle \quad (\rho \text{ primitive } 2r\text{-te Einheitswurzel})$$

der Ordnung $2r$.

- b) Entsprechend erhält man als Bild der binären Diedergruppe

$$\left\langle \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \bar{\rho} \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \subset SL_2(k)$$

(vgl. [S2], S.89) für $r \geq 3$ die Diedergruppe $\mathcal{D}_r$, bzw. für $r=2$ die Vierergruppe $\mathcal{V}_4$.

Für $r=2$ ist diese binäre Gruppe die Quaternionengruppe

$$\left\langle \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Ihre Erweiterung um das Element

$$\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} i-1 & i-1 \\ i+1 & -i-1 \end{pmatrix} \in SL_2(k),$$

das als Bild in $PGL_2(k)$ den Automorphismus $\omega: x \mapsto i(x+1)(x-1)^{-1}$ hat, liefert,

- c) die binäre Tetraedergruppe ([S2], S.91)

$$\left\langle \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} i-1 & i-1 \\ i+1 & -i-1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

deren Bild die Gruppe $\mathcal{A}_4$ ist.

- d) Die Gruppe

$$\left\langle \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & \xi^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} i-1 & i-1 \\ i+1 & -i-1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad (\xi \text{ primitive } 8\text{-Einheitswurzel})$$

die bei Springer ([S2], S.92) als binäre Oktaedergruppe bezeichnet wird, hat in $PGL_2(k)$ das Bild $\mathcal{Y}_4$.

- e) Zur Konstruktion einer binären Ikosaedergruppe kann man von einer binären Diedergruppe

$$\mathcal{D}_5 = \left\langle \begin{pmatrix} -\varepsilon^2 & 0 \\ 0 & -\varepsilon^3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \quad (\varepsilon^5=1, \varepsilon \neq 1)$$

ausgehen. Ein Element von $SL_2(k)$, das $T: x \mapsto \frac{(\varepsilon^2+\varepsilon^3)x+i}{-ix-(\varepsilon^2+\varepsilon^3)}$

überlagert, ist

$$\frac{1}{\varepsilon+\varepsilon^4} \begin{pmatrix} (\varepsilon^2+\varepsilon^3) & i \\ -i & -(\varepsilon^2+\varepsilon^3) \end{pmatrix}.$$

Die Gruppe, die von diesem Element und $\tilde{D}_5$ in $SL_2(k)$ erzeugt wird, muß demnach eine binäre Ikosaedergruppe sein, weil ihr Bild in $PGL_2(k)$ die Gruppe A_5 ist.

3.3.2 Projektive Invarianten der normierten Polyedergruppen mit Ausnahmebahnen als Nullstellenmengen.

In Anlehnung an Klein ([K1]) werden die separablen binären Formen, die genau die Elemente einer Ausnahmebahn von $\mathcal{G}$ als Nullstellenmenge besitzen, Grundformen von $\mathcal{G}$ genannt.

a) Zyklische Gruppen $\mathcal{Z}_r$:

Ausnahmebahnen sind $\{0\}, \{\infty\}$, die zugehörigen Grundformen sind also X, Y .

b) Diedergruppen $\mathcal{D}_r$ ($r \geq 3$) und die Klein'sche Vierergruppe $\mathcal{V}_4$ ($r=2$):

Als Grundformen erhält man:

- $F_0 := XY$ zu $\{0, \infty\}$

- $F_r := X^r - Y^r$ zu $\{1, \xi, \dots, \xi^{r-1}\}$ (ξ primitive r -te Einheitswurzel)

- $F_{2r} := X^r + Y^r$ zu $\{0, \rho\xi, \dots, \rho\xi^{r-1}\}$ ($\rho^2 = \xi$).

Jede Invariante induziert einen Charakter der zugehörigen binären Polyedergruppe $\tilde{G}$. Dieser wird durch seine Werte auf den Erzeugern beschrieben. Hier ergibt sich:

	$\begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho^{-1} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$
XY	1	-1
$X^r - Y^r$	-1	$-1 \cdot i^r$
$X^r + Y^r$	-1	i^r

Die Charaktere dienen im folgenden zur Berechnung von Invarianten höheren Grades.

c) Die Tetraedergruppe $\mathcal{A}_4$:

- Die Grundform zum Oktaeder O ist

$$O_6 := XY \cdot (X^4 - Y^4)$$

- Zu den Tetraedern T_0 und T_1 gehören jeweils die Formen

$$C_0 := X^4 - 2i\sqrt{3} X^2 Y^2 + Y^4$$

$$C_1 := X^4 + 2i\sqrt{3} X^2 Y^2 + Y^4$$

Die induzierten Charaktere werden durch folgende Tabelle gegeben:

	$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} i-1 & i-1 \\ i+1 & -i-1 \end{pmatrix}$
$XY (X^4 - Y^4)$	1	1	1
C_0	1	1	ρ
C_1	1	1	ρ^2

d) Die Oktaedergruppe $\mathfrak{S}_4$:

Das Oktaeder O gehört zu den Ausnahmebahnen von $\mathfrak{S}_4$,

$$O_6 = XY (X^4 - Y^4)$$

ist also auch $\mathfrak{S}_4$ -Invariante.

Zur Ausnahmebahn von $T=T_0 \cup T_1$ gehört die Grundform

$$C = C_0 C_1 = X^8 + 14 X^4 Y^4 + Y^8$$

Die Bestimmung der Grundform, die zu den Kantenhalbierungspunkten gehört, wird erleichtert, wenn man beachtet, daß $C_0 + C_1 = 2(X^4 + Y^4)$ genau die primitiven 8-ten Einheitswurzeln annulliert, daß also

$$(C_0 + C_1)(C_0 + C_1)^{\omega}(C_0 + C_1)^{\omega^2}$$

die gesuchte Invariante ist (vgl. 3.2.1.4). Wenn man noch die Wirkung des Repräsentanten

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} i-1 & i-1 \\ i+1 & -i-1 \end{pmatrix}$$

von ω in $SL_2(k)$ auf C_0, C_1 gemäß der obigen Charaktertabelle beachtet, erhält man als Invariante zu K

$$\frac{1}{2} (C_0^3 + C_1^3).$$

(Der Faktor $\frac{1}{2}$ dient der Normierung; $\frac{1}{2}(C_0^3 + C_1^3) = (X^{12} + Y^{12}) - 33(X^8 Y^4 + X^4 Y^8)$)

Zur Berechnung der Charaktere von $\mathfrak{S}_4$ genügt es aufgrund von c) die Wirkung von $\begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & \xi^{-1} \end{pmatrix}$ auf C_0 und C_1 zu berechnen, man erhält:

$$C_0 \longmapsto -C_1, \quad C_1 \longmapsto -C_0.$$

Dies liefert:

	$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} i-1 & i-1 \\ i+1 & -i-1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & \xi^{-1} \end{pmatrix}$
O_6	1	1	1	-1
$C_0 C_1$	1	1	1	1
$\frac{1}{2}(C_0^3 + C_1^3)$	1	1	1	-1

e) Ikosaedergruppe A_5 :

Die Invariante, die die Ecken des Ikosaeders als Nullstellenmenge besitzt (vgl. 3.2.1.5), läßt sich leicht berechnen:

$$f := XY \prod_{v=0}^4 (X - i \epsilon^v (\epsilon + \epsilon^4) Y) (X - i \epsilon^v (\epsilon^2 + \epsilon^3) Y) \\ = XY (X^{10} + 11i X^5 Y^5 + Y^{10})$$

Diese Invariante stimmt mit der bei Klein ([K2], S.56) ebenso bezeichneten Invariante bis auf eine Drehung des Koordinatensystems durch $x \mapsto ix$ überein (vgl. Bemerkung zu (3.4)).

Die Invarianten zu den Bahnen der Länge 20 und 30 werden unter Berücksichtigung dieser Drehung, die der Substitution $X \mapsto -iX, Y \mapsto Y$ entspricht, bei Klein ([K2], S.52) entnommen.

Man erhält

$$H = (X^{20} + Y^{20}) - 228i(X^{15}Y^5 + X^5Y^{15}) - 494 X^{10}Y^{10} \\ \text{und} \quad T = (X^{30} - Y^{30}) + 522i(X^{25}Y^5 - X^5Y^{25}) + 10005(X^{20}Y^{10} - X^{10}Y^{20})$$

Die Berechnung der Charaktere entfällt, da A_5 als eindimensionale Darstellung nur die triviale Darstellung besitzt.

3.3.3 Projektive Invarianten vom Grad der Gruppenordnung

H bezeichne eine Polyedergruppe von $\text{PGL}_2(k)$ und G_i seien die Grundformen von H ($i \in \{1,2\}$ falls H zyklisch ist, sonst $i \in \{1,2,3\}$).

Ferner sei $k_i \in \mathbb{N}$ so gewählt, daß

$$g := \text{grad}(G_i^{k_i}) = |H|.$$

Man betrachte den Morphismus

$$\begin{array}{ccc} \phi : \mathbb{P}_1 & \longrightarrow & R_n \\ a & \longmapsto & \mu_2 G_1^{k_1} - \mu_1 G_2^{k_2} \end{array}$$

(mit $\mu_i = G_i^{k_i}(a)$ für $i \in \{1,2\}$)

von $\mathbb{P}_1$ auf den von $G_1^{k_1}$ und $G_2^{k_2}$ in R_g aufgespannten eindimensionalen projektiven Raum $\mathbb{P}_1'$. Er ist wohldefiniert, weil G_1 und G_2 , zu verschiedenen Bahnen gehörend, keine gemeinsamen Nullstellen besitzen.

Die Bilder sind H-invariant, weil die $G_i^{k_i}$ dieselben Charaktere von H induzieren (vgl. 3.3.2). Die Fasern bestehen aus den Nullstellen der Bilder $\phi(a) \in R_n$, sie sind also H-Bahnen oder Vereinigungen solcher Bahnen. Im letzten Fall können wegen $\text{grad}(\phi(a))=g$ nur Ausnahmefasern von H auftreten. Dies tritt ein, wenn $\mu := [\mu_1, \mu_2] = [0;1]$ oder $[1;0]$ ist. Die Faser besteht dann genau aus den Nullstellenmengen von G_1 bzw. G_2 . Ist $\mu \notin \{[0;1], [1;0]\}$, so kann die Form $\mu_2 G_1^{k_1} - \mu_1 G_2^{k_2}$ keine Nullstelle mit G_1 oder G_2 gemeinsam haben. Die Nullstellenmenge ist dann also entweder eine Bahn der Länge g oder die dritte Ausnahmefaser von H. Dies zeigt, daß die Nullstellenmengen von Formen aus $\mathbb{P}_1'$ in allen Fällen genau aus einer H-Bahn in $\mathbb{P}_1$ bestehen.

Je 2 beliebige Formen in $\mathbb{P}_1'$ haben also disjunkte Nullstellenmengen oder sie stimmen überein. Weil offensichtlich jede H-Invariante vom Grad g in $\mathbb{P}_1'$ liegt (sie ist das Bild einer ihrer Nullstellen) ergibt sich

Lemma (3.9) : Es seien G_1, G_2 zwei Grundformen einer Polyedergruppe H und

$$k_i := |H| : \text{grad}(G_i) \quad (i \in \{1,2\}) .$$

Dann enthält der von $G_1^{k_1}$ und $G_2^{k_2}$ in R_n aufgespannte projektive Raum $\mathbb{P}_1'$ genau die separablen (projektiven) Invarianten von H vom Grad $|H|$, sowie die Potenzen der Grundformen vom Grad $|H|$. Die Bahnen von H in $\mathbb{P}_1$

und die Elemente von $\mathbb{P}'_1$ entsprechen sich bijektiv.

Zusatz : a) Durch geeignete Normierung erreicht man, daß genau $\mu \in \{0,1,\infty\}$ die inseparablen Formen liefert. Die Grundformen der normierten Polyedergruppen wurden entsprechend gewählt. Dies ergibt sich aus der folgenden Tabelle.

b) Es ist $\phi: \mathbb{P}_1 \longrightarrow \mathbb{P}'_1 = \mathbb{P}_1 / H$
geometrischer Quotient.

Beweis: Das Konzept eines geometrischen Quotienten ist lokal ([N], Prop.3.10). Für affine Teile von $\mathbb{P}'_1$ ist die Behauptung nach dem oben gesagten klar.

Tabelle der linearen Relationen zwischen den Potenzen der Grundformen

$\mathcal{D}_r \ (r \geq 2)^1)$	$(X^r - Y^r)^2 - (X^r + Y^r)^2 = -4 (XY)^r$
$\mathcal{A}_4$	$C_0^3 - C_1^3 = -12i\sqrt{3} \cdot O_6^2$
$\mathcal{S}_4$	$[\frac{1}{2}(C_0^3 + C_1^3)]^2 - (C_0 C_1)^3 = 108 \cdot O_6^4$
$\mathcal{A}_5^2)$	$T^2 - H^3 = 1728i f^5$
¹⁾ $r=2$ ergibt $\mathcal{V}_4$ ²⁾ Begründung: Bei $T^2 - H^3$ entfällt der Term X^{60}. Also hat $T^2 - H^3$ die Nullstelle ∞, die Menge der Ikosaedereckpunkte muß in der Nullstellenmenge liegen und es gilt $f \mid T^2 - H^3$. Der Koeffizient 1728i ergibt sich durch Vergleich.	

Bei den Vierergruppen wird sich die Wahl anderer Erzeuger von $\mathbb{P}'_1$ als günstiger erweisen. Die beiden Tetreader T_0, T_1 (vgl. 3.2.1.3) sind vierelementige Bahnen von $\mathcal{V}_4$. Nach Lemma (3.9) müssen also auch die zugehörigen Invarianten C_0 und C_1 den Raum $\mathbb{P}'_1 = \mathbb{P}_1 / \mathcal{V}_4$ aufspannen.

Lemma (3.10): Jeder Invariante der Vierergruppe $\mathcal{V}_4$ mit einer Bahn der Länge 4 als Nullstellenmenge läßt sich durch

$$\mu_1 C_0 - \mu_0 C_1$$

mit $\mu \in \mathbb{P}_1$, $\mu \neq [1;1], [\rho;1], [\rho^2;1]$

(diese Werte liefern die Potenzen der Grundformen von $\mathcal{V}_4$)

oder durch

$$X^4 - \mu X^2 Y^2 + Y^4 \quad (\mu \neq \pm 2, \mu \in k)$$

darstellen.

Beweis: a) Aufgrund von Lemma (3.9) sind nur noch die Werte von μ zu berechnen, für die $\mu_1 C_0 - \mu_0 C_1$ inseparabel wird. $\mu = [1;1]$ liefert $-4i\sqrt{3}X^2Y^2$. Wenn man beachtet, daß der Dreizyklus $\omega \in \mathcal{A}_4$ die Ausnahmestellen von $\mathcal{V}_4$ vertauscht und auf C_0 bzw. C_1 die Eigenwerte ρ bzw. ρ^2 besitzt (vgl. 3.2.3.2), erhält man die beiden anderen Werte von μ .

b) Der zweite Teil der Aussage wird wie die folgende Bemerkung (3.11) gezeigt.

Bemerkung (3.11): Bei den Diedergruppen haben die Elemente von $\mathbb{P}_1/\mathcal{D}_r$ die Gestalt

$$\begin{aligned} & \mu_2 (X^r - Y^r)^2 - \mu_1 (X^r + Y^r)^2 \\ & = c \cdot (X^{2r} - \mu' X^r Y^r + Y^{2r}) \end{aligned}$$

mit $\mu' = 2 \cdot (\mu_2 + \mu_1)(\mu_2 - \mu_1)^{-1} \in \mathbb{P}_1$, $c = \mu_2 - \mu_1 \in k^\times$.

Die separablen Formen erhält man wegen $[\mu_1, \mu_2] \neq 0, 1, \infty$ durch $\mu' \in k \setminus \{\pm 2\}$.

Der Beweis ergibt sich direkt durch Umformung.

3.4. Invariantenräume und ihre Beziehung zu den Isomorphieklassen hyperelliptischer Kurven

Im folgenden soll versucht werden, für jede Polyedergruppe G (als abstrakte Gruppe) die Menge der Isomorphieklassen hyperelliptischer Kurven zu parametrisieren, bei denen die reduzierte Automorphismengruppe A eine zu G isomorphe Untergruppe enthält.

Da A mehrere solcher Untergruppen besitzen kann, soll dies präziser wie folgt geschehen.

Definition (3.12) : a) Unter einer hyperelliptischen Kurve Γ mit (reduzierter) G -Aktion wird ein Tripel

$$(\Gamma, M, G \hookrightarrow S_M)$$

mit folgenden Eigenschaften verstanden:

- M ist Verzweigungsmenge von Γ (also durch Γ wohlbestimmt).
- $G \hookrightarrow S_M$ ist eine lineare Permutationsgruppe.
- b) Zwei hyperelliptische Kurven Γ, Γ' mit (reduzierter) G -Aktion heißen isomorph, wenn ein Isomorphismus $\phi: \Gamma \xrightarrow{\sim} \Gamma'$ existiert, so daß die zugehörige Abbildung der Verzweigungsmengen M, M' einen Isomorphismus der linearen Permutationsgruppen induziert.

Bemerkung:

- 1) Dieser Isomorphiebegriff ist schärfer als der von Kurven allein.

Man betrachte z.B. die durch

$$C = C_0 C_1 = X^8 + 14X^4 Y^4 + Y^8$$

bestimmte Kurve Γ ($g = 3$) mit $A = \mathcal{P}_4$ (vgl. 3.3.2.d) und ihre Untergruppen

$$\mathcal{V}_4 = \langle x \mapsto -x, x \mapsto x^{-1} \rangle, \mathcal{V}'_4 = \langle x \mapsto -x, x \mapsto ix^{-1} \rangle.$$

$(\mathcal{V}_4, \phi)$ und $(\mathcal{V}'_4, \phi')$ seien zwei lineare Permutationsgruppen, die als Bild in $\text{PGL}_2(k)$ die Gruppen $\mathcal{V}_4$ und $\mathcal{V}'_4$ besitzen. Die Kurven mit $\mathcal{V}_4$ -Aktion $(\Gamma, M, \phi: \mathcal{V}_4 \hookrightarrow S_M)$ und $(\Gamma, M, \phi': \mathcal{V}'_4 \hookrightarrow S_M)$ sind nicht isomorph, weil die Gruppen $\mathcal{V}_4$ und $\mathcal{V}'_4$ nicht in $\mathcal{P}_4$ isomorph sind.

- 2) Sind Γ, Γ' zwei Kurven mit reduzierter Automorphismengruppe $A \simeq G$, so induziert ein Isomorphismus von Γ und Γ' einen Isomorphismus der G -Aktion.

3.4.1 Invariantenräume

Ist $\mathcal{G} \subset \text{PGL}_2(k)$ der normierte Repräsentant der (abstrakten) Polyedergruppe G , so induziert jede Invariante F von $\mathcal{G}$ eine Permutationsdarstellung $\pi: \mathcal{G} \hookrightarrow S_M$ auf der Nullstellenmenge M von F .

Definition (3.13): Es sei G eine Polyedergruppe, $\mathcal{G}$ ihr normierter Repräsentant und π_G der Isomorphietyp einer linearen Permutationsdarstellung von G . Dann bezeichne:

- $I_n(\pi_G) \subset R_n$ die Menge aller separablen Invarianten von $\mathcal{G}$, für die

$$\mathcal{G} \hookrightarrow S_M$$
 zum Isomorphietyp π_G gehört.
- $I_n(G) = \bigcup_{\{\pi_G\}} I_n(\pi_G)$ die Menge aller separablen Invarianten.

Zur Beschreibung der Invariantenräume dienen die folgenden Bezeichnungen:

Zwei binäre Formen $U, V \in R_1$ ($1 \in \mathbb{N}$) mit $U \notin k \cdot V$ (projektiv eigentlich: $U \neq \lambda V$) sind algebraisch unabhängig über k und erzeugen einen Polynomring

$$k[U, V] \subset k[X, Y].$$

Daher ist folgende Definition sinnvoll:

Definition (3.14): a) R_n^Δ bezeichne die Menge der separablen binären Formen vom Grad n in X, Y .

- b) Es seien $U, V \in R_1$ ($1 \in \mathbb{N}$, $U \notin k \cdot V$) binäre Formen in X, Y .

$$R_m(U, V) \subset R_{m1}$$

bezeichne die Menge der binären Formen vom Grad m in U, V und

$$R_m^\Delta(U, V) := R_m(U, V) \cap R_{1m}^\Delta$$

die Teilmenge der Formen, die separabel in X, Y sind.

Dann ist $R_m^\Delta(U, V)$ der Schnitt eines linearen Teilraums von R_{m1} mit dem Komplement R_{m1}^Δ der Diskriminantenhyperfläche. R_m^Δ wird projektiv betrachtet und hat daher die Dimension m .

Im folgenden bezeichnen G_1, G_2, G_3 die Grundformen von $\mathcal{G}$. (Zur Vereinheitlichung der Schreibweise sei für zyklische Gruppen $G_3=1$ gesetzt.)

Es gilt der

Satz (3.15): a) Die binären Formen aus $G_1^{v_1} G_2^{v_2} G_3^{v_3} R_m^{\Delta}(G_1^{k_1}, G_2^{k_2})$ sind Invarianten von Q . Der Isomorphietyp π_G der G -Aktion wird durch $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3), 0 \leq v_i \leq 1$, festgelegt. Es ist

$$I_n(\pi_G) = \bigcup_{\{\underline{v} | \underline{v} \text{ bestimmt von } \pi_G\}} G_1^{v_1} G_2^{v_2} G_3^{v_3} R_m^{\Delta}(G_1^{k_1}, G_2^{k_2})$$

b) Dabei ist die Anzahl der von π_G bestimmten Tripel $\underline{v}$, also die Zahl der Komponenten von $I_n(\pi_G)$, meist eins, mit Ausnahme folgender Fälle, in denen die Zahl der Komponenten gegeben ist durch:

π_G	$z_r(1)$	$D_r(p, 1)$	A_4^1	$v_4(1)$	$v_4(2)$
	2	2	2	3	3
	¹⁾ : $n \equiv 4(6)$				

c) m entspricht der Zahl der Bahnen voller Länge in M und es ist

$$m = \dim I_n(\pi_G) = \frac{n - \text{grad}(G_1^{v_1} G_2^{v_2} G_3^{v_3})}{|G|}$$

Beweis: a) Es bezeichne $g = |G|$. Man betrachte

$$L_m^{\Delta} = \left\{ \prod_{i=1}^m (\mu_{2i} G_1^{k_1} - \mu_{1i} G_2^{k_2}) \mid \mu_i = [\mu_{1i}; \mu_{2i}] \in \mathbb{P}_1 \setminus \{0; 1; \infty\}, \right. \\ \left. \mu_i \text{ paarweise verschieden} \right\}$$

Aufgrund des Zusatzes zu Lemma (3.9) besteht L_m^{Δ} genau aus der Menge der separablen Formen, deren Nullstellenmenge in G -Bahnen der Länge g zerfällt.

Es ist $L_m^{\Delta} = R_m^{\Delta}(G_1^{k_1}, G_2^{k_2})$, weil aus der Verschiedenheit der μ_i die Verschiedenheit der Bahnen folgt und weil $\mu_i \neq 0, 1, \infty$ sicherstellt, daß die Faktoren separabel sind.

b) Der Isomorphietyp π_G legt durch die Zahl und Länge der Ausnahmehbahnen auch die Zahl m der g -elementigen Bahnen von Q in M fest.

Also ist $F \in I_n(\pi_G)$ von der Form

$$F = G_1^{v_1} G_2^{v_2} G_3^{v_3} F_0 \text{ mit } F_0 \in R_m(G_1^{k_1}, G_2^{k_2})$$

Die Tripel $\underline{v}$ werden durch den Isomphietyp π_G (Länge der Ausnahmebahnen mit Vielfachheit) festgelegt. Mehrere Lösungen $\underline{v}$ können nur auftreten, wenn G verschiedene Ausnahmebahnen gleicher Länge besitzt, die bei dem gegebenen Isomphietyp nicht gleichzeitig in M vorkommen können. Dies tritt in folgenden Fällen ein:

- Bei $2_r(1)$, $D_r(p,1)$ und A_4 ($n \equiv 4(6)$) enthält M genau eine von den zwei Ausnahmebahnen gleicher Länge (vgl. Tabelle der Bahnlängen in 3.2.2).
- Bei $V_4(1)$ bzw. $V_4(2)$ enthält M genau 1 bzw. 2 von den 3 Bahnen gleicher Länge. Dies ergibt die 3 Komponenten.

Zusatz: Der Normalisator $\mathcal{N}(g)$ operiert transitiv auf den Komponenten von $I_n(\pi_G)$.

Beweis: In den Fällen $\pi_G = 2_r(1)$, $D_r(p,1)$ und A_4 tauscht der Normalisator die beiden Bahnen gleicher Länge (vgl. Bemerkung(3.6)). Im Fall der Vierergruppe operiert er sogar transitiv auf den Paaren von Ausnahmebahnen.

Folgerung (3.16) : Γ und Γ' seien hyperelliptische Kurven. Die vollen Automorphismengruppen $\text{Aut } \Gamma$ und $\text{Aut } \Gamma'$ sind genau dann über $\text{Gal}(\Gamma | k(x)) \simeq \text{Gal}(\Gamma' | k(x)) \simeq \mathbb{Z}_2$ isomorph, wenn ihre reduzierten Automorphismengruppen als lineare Permutationsgruppen auf den Verzweigungsmengen isomorph sind.

Beweis:

a) Es sei $K|k(x)$ der Funktionenkörper einer hyperelliptischen Kurve Γ , $\tilde{\alpha} \in A$ und $\text{ord } \tilde{\alpha} = r \equiv 0(2)$.

Dann haben die Fortsetzungen von $\tilde{\alpha}$ auf K genau dann die Ordnung r , wenn $\tilde{\alpha}$ fixpunktfrei auf M operiert. Im Fall von zwei Fixpunkten hat jede Fortsetzung die Ordnung $2r$:

O.E. sei $K=k(x,y)$ mit

$$y^2 = \prod_{i=1}^s (x^r - \lambda_i) \quad (\lambda_i \in k; i=1,2,\dots,s)$$

und $\tilde{\alpha}: x \mapsto \xi x \quad (\xi = e^{\frac{2\pi i}{r}})$

$\tilde{\alpha}$ läßt y^2 fest, erlaubt also die Fortsetzung $\alpha(y) = y$. Die andere Fortsetzung von $\tilde{\alpha}$ auf K hat die gleiche Ordnung.

Im Fall von 2 Fixpunkten ergibt sich

$$y^2 = x \prod_{i=1}^s (x^r - \lambda_i)$$

und $(\alpha(y))^2 = \xi y^2$. Wenn die Ordnung von ξ gerade ist, muß α die Ordnung $2r$ haben.

- b) Es sei jetzt $\pi: A \hookrightarrow S_n$ die bei den Kurven Γ, Γ' isomorphe Darstellung von A (bei geeigneter Ordnung der Verzweigungsmengen). O.E. kann angenommen werden, daß

$$A \hookrightarrow \text{PGL}_2(k)$$

induziert von der Operation auf den Verzweigungsmengen in beiden Fällen die normierte Polyedergruppe $\mathcal{G}$ liefert. Die definierende Gleichung der beiden Kurven kann aufgrund von (3.15) in der Form

$$y^2 = \tilde{G}_1^{v_1} \tilde{G}_2^{v_2} \tilde{G}_3^{v_3} \prod_{i=1}^m (\tilde{G}_1^{k_1} - \lambda_i \tilde{G}_2^{k_2})$$

$$\text{bzw. } y^2 = \tilde{G}_1^{v_1} \tilde{G}_2^{v_2} \tilde{G}_3^{v_3} \prod_{i=1}^m (\tilde{G}_1^{k_1} - \lambda_i' \tilde{G}_2^{k_2})$$

geschrieben werden ($\tilde{G}_i$ bezeichne die dehomogenisierten Grundformen.) Weil die $\tilde{G}_i^{k_i}$ absolute Invarianten der (binären) Polyedergruppen sind, hängt die Fortsetzung der Elemente von A auf K nicht von den λ_i bzw. λ_i' ab, d.h. $\text{Aut } \Gamma$ und $\text{Aut } \Gamma'$ sind isomorph.

- c) Ein Isomorphismus von $\text{Aut } \Gamma$ und $\text{Aut } \Gamma'$ über $\mathbb{Z}_2$ liefert einen Isomorphismus der reduzierten Automorphismengruppen. Es bleibt zu zeigen, daß sogar die Isomorphietypen übereinstimmen.

Verschiedene Isomorphieklassen der gleichen (abstrakten) Gruppe treten nur in folgenden Fällen bei gleichem n auf (vgl. 3.2.2):

- $\mathbb{Z}_2(0)$ und $\mathbb{Z}_2(2)$

- $V_4(i)$ und $V_4(j)$ (und (i,j) gleich $(0,2)$ bzw. $(1;3)$)

- $D_r(p,0)$ und $D_r(p,2)$

Im ersten Fall ergibt sich direkt aus a) die Verschiedenheit von $\text{Aut } \Gamma$, und $\text{Aut } \Gamma'$. Durch Abzählen der Involutionen und der Elemente der Ordnung 4 in $\text{Aut } \Gamma$ mit Hilfe von a) sieht man dies auch in den beiden verbleibenden Fällen.

3.4.2 Die Invariantenräume $I_n(\pi_G)$ modulo $\mathcal{N}(g)$ als Modulräume der Kurven mit G-Aktion

Die Elemente der Invariantenräume stehen im allgemeinen in keiner eindeutigen Beziehung zu den Isomorphieklassen hyperelliptischer Kurven. Auf $I_n(\pi_G)$ operiert noch $\mathcal{N}(g)$ vermöge

$$F \longmapsto {}^{\alpha}F, \quad \alpha \in \mathcal{N}(g)$$

(denn ${}^{\alpha}F$ ist Invariante von ${}^{\alpha}g=g$ und der Isomphietyp der Darstellung von g auf den Wurzeln von F bleibt erhalten.)

Da g selbst trivial auf $I_n(\pi_G)$ operiert, braucht nur $\mathcal{N}(g)/g$ betrachtet zu werden.

Man erhält

Hauptsatz (3.17) : $I_n(\pi_G) \bmod \mathcal{N}(g)/g$ ist grober Modulraum der hyperelliptischen Kurven mit G-Aktion vom Isomphietyp π_G .

Zusatz: Für $F \in I_n(G)$ bezeichne A ($g \leq A < \text{PGL}_2(k)$) die reduzierte Automorphismengruppe der zugehörigen Kurve Γ . Dann ist die Zahl der $\mathcal{N}(g)/g$ -Bahnen in $I_n(G)$, die Kurven der Isomorphieklasse von Γ repräsentieren, gleich der Zahl der Konjugationsklassen von G in A .

Insbesondere gilt für Kurven mit $A \cong G$, daß ihre Isomorphieklassen durch genau ein Element von $I_n(G) \bmod \mathcal{N}(g)/g$ repräsentiert werden.

Beweis:

a) Zunächst wird eine Parametrisierung der Menge der Kurven mit G-Aktion angegeben und gezeigt, daß $I_n(\pi_G) \bmod \mathcal{N}(g)/g$ der Quotient dieses Parameterraums nach der Operation von $\text{PGL}_2(k)$ ist: S_n bezeichne die symmetrische Gruppe von $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ und Π die Menge der treuen Permutationsdarstellungen von G in S_n vom Isomphietyp π_G . Es sei

$$P = \{(\underline{x}, \pi) \in (\mathbb{P}_1^n)_{\Delta} \times \Pi \mid \text{Die von } \pi \text{ auf } \{x_1, \dots, x_n\} \text{ induzierte Permutationsgruppe ist linear.}\}$$

($(\mathbb{P}_1^n)_{\Delta}$ bezeichne die separablen n -Tupel von $\mathbb{P}_1^n$. P ist abgeschlossen in $(\mathbb{P}_1^n)_{\Delta} \times \Pi$, weil die Zulässigkeit von $\pi(\gamma), \gamma \in G$ zu linearen Gleichungen für die Komponenten von $\underline{x}$ führt.)

Jeder Kurve mit G-Aktion wird durch die Wahl einer Anordnung der Verzweigungspunkte $x_1 \in M$ ein Paar $(\underline{x}, \pi) \in P$ zugeordnet. Die Willkür dieser Anordnung wird aufgehoben, wenn man von P zum Quotienten nach S_n übergeht, wobei S_n durch Tausch der Komponenten von $\underline{x}$ und Konjugation der Permutationsdarstellung π auf P operiert. In diesem Sinn parametrisiert P/S_n die Menge der Kurven mit G-Aktion.

Auf P operiert $PGL_2(k)$ durch

$$(\gamma, (\underline{x}, \pi)) \longrightarrow (\gamma \underline{x}, \pi)$$

(mit $\gamma \underline{x} = (\gamma x_1, \dots, \gamma x_n)$). Die $PGL_2(k)$ -Operation vertauscht mit S_n , geht also auf den Quotienten P/S_n über. Offensichtlich entsprechen die $PGL_2(k)$ -Bahnen in P/S_n genau den Klassen isomorpher hyperelliptischer Kurven mit G-Aktion.

Es soll jetzt gezeigt werden, daß $I_n(\pi_G) \bmod \mathcal{N}(g)/g$ der Quotient von P/S_n nach dieser $PGL_2(k)$ -Operation ist:

In 3.1 wurde gezeigt, daß isomorphe Polyedergruppen von $PGL_2(k)$ jeweils genau eine Konjugationsklasse bilden. B bezeichne die Konjugationsklasse von G in $PGL_2(k)$, g den normierten Repräsentanten. Man erhält einen Isomorphismus der Rechtsnebenklassen

$$\phi: PGL_2(k)/\mathcal{N}(g) \xrightarrow{\sim} B$$

der $\bar{\alpha} \in PGL_2(k)/\mathcal{N}(g)$ die konjugierte Gruppe ${}^\alpha g$ zuordnet.

Man betrachte jetzt den Morphismus

$$\begin{aligned} P &\longrightarrow (\mathbb{P}_1^n)_\Delta \times B \\ (\underline{x}, \pi) &\longmapsto (\underline{x}, \pi(G)), \end{aligned}$$

$\pi(G)$ bedeute dabei das durch π und $\underline{x}$ bestimmte Bild von G in $PGL_2(k)$. ϕ^{-1} setzt diesen zu einem Morphismus

$$\begin{aligned} P &\longrightarrow (\mathbb{P}_1^n)_\Delta \times PGL_2(k)/\mathcal{N}(g) \\ (\underline{x}, \pi) &\longmapsto (\underline{x}, \bar{\alpha}) \end{aligned}$$

fort. Wenn man noch $\underline{x}$ die zugehörige binäre Form $F \in R_n$ zuordnet (also die Anordnung der x_i 'vergißt'), erhält man nach Übergang zu P/S_n

$$\begin{aligned} P/S_n &\longrightarrow R_n \times PGL_2(k)/\mathcal{N}(g) \\ (\underline{x}, \pi) &\longmapsto (F, \bar{\alpha}) \end{aligned}$$

mit der Eigenschaft, daß ${}^{\alpha^{-1}} F$ für jeden Repräsentanten von $\bar{\alpha}$ projektive Invariante von g ist. Dies liefert den gesuchten Morphismus

$$\begin{array}{ccc} q: P/S_n & \longrightarrow & I_n(\pi_G) \bmod \mathcal{N}(q)/q \\ (\underline{x}, \pi) & \longmapsto & \alpha^{-1} F \bmod \mathcal{N}(q)/q \end{array}$$

(Die Wahl eines anderen Repräsentanten α von $\bar{\alpha}$ liefert mod $\mathcal{N}(q)/q$ das gleiche Bild.)

Es ist klar, daß q auf den Bahnen von $PGL_2(k)$ konstant ist, zu zeigen bleibt noch, daß q verschiedene Bahnen trennt:

$$q(\overline{x_1, \pi_1}) = q(\overline{x_2, \pi_2}) \quad ((\overline{x_i, \pi_i}) \in P/S_n)$$

bedeutet

$$n\alpha_1 F_1 = \alpha_2 F_2 \quad \text{und} \quad G = n\alpha_1^{-1} \pi_1(G) = \alpha_2^{-1} \pi_2(G)$$

(mit $n \in \mathcal{N}(q)$, Bezeichnungen wie oben).

Dies zeigt, daß die zu x_1 bzw. x_2 gehörenden Kurven mit der von π_1 bzw. π_2 induzierten Aktion von G isomorph sind. Dies war zu zeigen.

b) Es bleibt zu klären, in welchem Sinn $I_n(\pi_G) \bmod \mathcal{N}(q)/q$ Modulraum der Menge der hyperelliptischen Kurven mit G -Aktion ist:

- Eine Familie hyperelliptischer Kurven vom Geschlecht g über k ist ein glatter, surjektiver, eigentlicher Morphismus

$$f: Y \longrightarrow X$$

dessen Fasern $f^{-1}(x)$ für alle $x \in X$ glatte, vollständige, hyperelliptische Kurven vom Geschlecht g sind.

- Eine Familie hyperelliptischer Kurven mit G -Aktion ist ein solcher Morphismus zusammen mit einer zu G isomorphen Gruppe von Automorphismen von Y über X , so daß die Restriktion auf die Fasern Kurven mit G -Aktion (vom Isomorphietyp π_G) liefert.

Die Modulmannigfaltigkeit M_k hyperelliptischer Kurven vom Geschlecht g über dem Körper k erhält man als Quotient von $P_1^n V(\Delta)$ ($V(\Delta)$ =Diskriminantenhyperfläche) nach der Operation von S_n und $PGL_2(k)$ (vgl. Geyer, [G]). Sie ist Modulmannigfaltigkeit in folgendem Sinn:

*) Zu jeder Familie $f: Y \longrightarrow X$ hyperelliptischer Kurven vom Geschlecht g gibt es genau einen Morphismus $\phi: X \longrightarrow M_k$, so daß $\phi(x)$ der Isomorphieklasse von $f^{-1}(x)$ entspricht.

Zum Beweis von *) konstruiert man mit Hilfe der Garbe der relativen Differentiale von Y über X Abbildungen

$$\begin{array}{ccc} Y & & \\ f \downarrow & \searrow h & \\ & & Z \\ & \swarrow g & \\ X & & \end{array}$$

so daß g eine P_1 -Faserung ist und h die kanonischen zweiblättrigen

Überlagerungen hyperelliptischer Kurven über $\mathbb{P}_1$ zusammenfaßt. Die Restriktion von f auf den Verzweigungsort $V \subset Y$ liefert eine endliche Surjektion vom Grad $n=2g+2$. Weil g lokal trivial ist, lokal also $Z=X \times \mathbb{P}_1$ gilt, liefert $h(V) \subset Z$ einen Morphismus

$$\psi: X \longrightarrow \mathbb{P}_1^n / S_n$$

der $x \in X$ die Menge der Verzweigungspunkte der zugehörigen Kurve zuordnet. Ist zusätzlich eine Gruppe G von Automorphismen von Y über X gegeben, so operiert G auf dem Verzweigungsort und induziert eine Abbildung

$$\bar{\psi}: X \longrightarrow P/S_n,$$

die $x \in X$ die zugehörige Menge der Verzweigungspunkte und die Darstellung von G auf der Menge der Verzweigungspunkte zuordnet. Die Fortsetzung von $\bar{\psi}$ durch die Quotientenabbildung nach der Operation von $\text{PGL}_2(k)$ auf P/S_n gemäß a) liefert den gesuchten Morphismus in den Modulraum $I_n(\pi_G) \bmod \mathcal{N}(g)/g$.

Beweis des Zusatzes:

Es sei $F \in I_n(G)$, Γ die zugehörige hyperelliptische Kurve und $A \geq G$ die reduzierte Automorphismengruppe. Jeder zu G isomorphen Untergruppe $g' < A$ ist eine $\mathcal{N}(g)$ -Bahn in $I_n(G)$ zugeordnet:

g' ist in $\text{PGL}_2(k)$ zu g konjugiert: ${}^\alpha g' = g$, $\alpha \in \text{PGL}_2(k)$. Also ist ${}^\alpha F$ Invariante von g und ${}^\alpha F \in I_n(G)$. Weil α nur modulo $\mathcal{N}(g)$ bestimmt ist, bestimmt g' nur die $\mathcal{N}(g)$ -Bahn von ${}^\alpha F$.

Offensichtlich sind alle Formen in $I_n(G)$, die die Isomorphieklasse von Γ repräsentieren, in solch einer Bahn enthalten. Zwei Untergruppen g_1 und g_2 , die in A konjugiert sind, liefern dieselbe $\mathcal{N}(g)$ -Bahn in $I_n(G)$. Sind g_1 und g_2 in A nicht konjugiert, so gilt

$${}^{\alpha_1} g_1 = {}^{\alpha_2} g_2 = g \quad \text{für } \alpha_1, \alpha_2 \in \text{PGL}_2(k)$$

woraus ${}^{\alpha_1} F, {}^{\alpha_2} F \in I_n(G)$

folgt. Die Annahme, daß diese beiden binären Formen in der selben $\mathcal{N}(g)$ -Bahn liegen, führt zu

$$\delta {}^{\alpha_1} F = {}^{\alpha_2} F \quad \text{mit } \delta \in \mathcal{N}(g)$$

bzw. zu $\alpha := \alpha_2^{-1} \delta \alpha_1 \in A$.

Dies ergibt $\alpha g_1 = g_2$ mit $\alpha \in A$ im Widerspruch zur Annahme.

Bemerkung: In der Situation des Zusatzes zu (3.17) entspricht die Zahl der Konjugationsklassen von G in A der Anzahl der $\mathcal{N}(Q)$ -Bahnen in $I_n(G)$, die die Kurve Γ repräsentieren. Diese Aussage läßt sich nicht auf $I_n(\pi_G)$ einschränken, wie man an folgendem Beispiel sieht:

Es sei $G=\mathbb{Z}_2$ und Γ durch $F=XY(X^4-Y^4)$ bestimmt also $A=\mathcal{Y}_4$. Die zwei Konjugationsklassen von G in A bestimmen die binären Formen

$$F \text{ und } (X^2-Y^2)(X^4+6X^2Y^2+Y^4) =: F',$$

die zwar beide in $I_n(\mathbb{Z}_2)$ liegen, F aber in $I_n(\mathbb{Z}_2(2))$ und F' in $I_n(\mathbb{Z}_2(0))$. Die Ursache dafür ist die Verschiedenheit der linearen Permutationsdarstellungen der zwei Klassen zyklischer Gruppen $\mathbb{Z}_2$.

(Zur Berechnung von F' : Wähle in A die Gruppen

$$\mathcal{G}' = \langle x \mapsto -x \rangle \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{G}'' = \langle x \mapsto ix^{-1} \rangle.$$

Die erste liefert F , für die zweite Gruppe muß $\alpha \in \text{PGL}_2(k)$ bestimmt werden, mit ${}^\alpha \mathcal{G}' = \mathcal{G}''$. Dies leisten die Drehung $x \mapsto \xi x$, die die Konjugationsklassen von $\mathbb{Z}_2$ in $A=\mathcal{Y}_4$ tauscht und anschließend $\omega \in S_4$ ($\xi^2 = i$).

3.4.3 Die speziellen Invariantenräume

Die Struktur der Invariantenräume ergibt sich aus Satz (3.15) und aus 3.2.2. Im folgenden sollen die Invariantenräume zu den vorkommenden Isomorphietypen linearer Permutationsgruppen explizit angegeben werden, teilweise ergibt sich eine etwas übersichtlichere Beschreibung als durch (3.15). Die Wirkung des Normalisators $\mathcal{N}(g)$ auf die Räume $I_n(\pi_G)$ wurde bei zyklischen Gruppen und Diedergruppen in den Kapiteln 1 und 2 beschrieben, für die verbleibenden nicht-trivialen Fälle, die Klein'sche Vierergruppe und die Tetraedergruppe soll das hier geschehen.

Zur Beschreibung der Invariantenräume dienen die folgenden Bezeichnungen:

Definition (3.18): Für $U, V \in R_1$ ($1 \in \mathbb{N}$; $U \in k^*V$) und $m \in \mathbb{N}_0$ seien folgende Teilräume des projektiven Raums der binären Formen festgelegt:

$$S_m(U, V) = \{f \in R_m(U, V) \mid f = \sum_{i=1}^m a_i U^i V^{m-i}, a_i = a_{m-i}\}$$

$$A_m(U, V) = \{f \in R_m(U, V) \mid f = \sum_{i=1}^m a_i U^i V^{m-i}, a_i = -a_{m-i}\}$$

$S_m^\Delta(U, V)$ bzw. $A_m^\Delta(U, V)$ bezeichne die Formen von $S_m(U, V)$ bzw. $A_m(U, V)$, die separabel in X, Y sind.

Lemma (3.19): Es gilt

$$a) S_{2s}(U, V) = R_s((U-V)^2, (U+V)^2) \quad (s \in \mathbb{N})$$

b) für $s \equiv 0(2)$:

$$A_s(U, V) = (U^2 - V^2) S_{s-2}(U, V)$$

für $s \equiv 1(2)$:

$$S_s(U, V) = (U+V) S_{s-1}(U, V)$$

$$A_s(U, V) = (U-V) S_{s-1}(U, V)$$

Beweis:

a) ergibt sich durch Induktion mit Hilfe von

$$U^m + V^m = (U+V)^m - UV \cdot F, \text{ mit } F \in S_{2s-2}(U, V) \text{ und}$$

$$4UV = (U+V)^2 - (U-V)^2$$

b) erhält man in ähnlicher Weise.

3.4.3.1 Übersicht über die Invariantenräume

G	π_G	$I_n(\pi_G)$	dim	Aktion von $\mathcal{N}(q)/g$
$\mathbb{Z}_r$ $r \geq 2$	$\mathbb{Z}_r(0)$ $\mathbb{Z}_r(1)$ $\mathbb{Z}_r(2)$	$R_s^\Delta(X^r, Y^r) \quad n=rs$ $X \cdot R_s^\Delta(X^r, Y^r) \dot{\cup} Y \cdot R_s^\Delta(X^r, Y^r) \quad n=rs+1$ $XY \cdot R_s^\Delta(X^r, Y^r) \quad n=rs+2$	s	1)
D_r $r \geq 3$	$D_r(0,0)$ $D_r(0,1)$ $D_r(0,2)$ $D_r(2,0)$ $D_r(2,1)$ $D_r(2,2)$	$S_s^\Delta(X^r, Y^r) \quad n=rs, s \equiv 0(2)$ $S_s^\Delta(X^r, Y^r) \dot{\cup} A_s^\Delta(X^r, Y^r) \quad n=rs, s \equiv 1(2)$ $A_s^\Delta(X^r, Y^r) \quad n=rs, s \equiv 0(2)$ $XY \cdot S_s^\Delta(X^r, Y^r) \quad n=rs+2, s \equiv 0(2)$ $XY \cdot S_s^\Delta(X^r, Y^r) \dot{\cup} XY \cdot A_s^\Delta(X^r, Y^r) \quad n=rs+2, s \equiv 1(2)$ $XY \cdot A_s^\Delta(X^r, Y^r) \quad n=rs+2, s \equiv 0(2)$	$\frac{s}{2}$ $\frac{s-1}{2}$ $\frac{s-2}{2}$ $\frac{s}{2}$ $\frac{s-1}{2}$ $\frac{s-2}{2}$	1)
V_4	$V_4(0)$ $V_4(2)$ $V_4(1)$ $V_4(3)$	$S_{2k}^\Delta(X^2, Y^2) = R_k^\Delta(C_0, C_1) \quad k=\frac{n}{4}, n \equiv 0(4)$ $XY(X^2-Y^2) \cdot S_{2k}^\Delta(X^2, Y^2)$ $\dot{\cup} XY(X^2+Y^2) \cdot S_{2k}^\Delta(X^2, Y^2)$ $\dot{\cup} (X^4-Y^4) \cdot S_{2k}^\Delta(X^2, Y^2) \quad k=\frac{n-4}{4}, n \equiv 0(4)$ $(X^2-Y^2) \cdot S_{2k}^\Delta(X^2, Y^2)$ $\dot{\cup} (X^2+Y^2) \cdot S_{2k}^\Delta(X^2, Y^2)$ $\dot{\cup} XY \cdot S_{2k}^\Delta(X^2, Y^2) \quad k=\frac{n-2}{4}, n \equiv 2(4)$ $O_6 \cdot S_{2k}^\Delta(X^2, Y^2) =$ $= O_6 \cdot R_k^\Delta(C_0, C_1) \quad k=\frac{n-6}{4}, n \equiv 2(4)$	k k k k	2)
A_4	$n \bmod 12$ 0 8 6 2 4 10	$R_m^\Delta(C_0^3, C_1^3) \quad m=\frac{n}{12}$ $C_0 C_1 R_m^\Delta(C_0^3, C_1^3) \quad m=\frac{n-4}{12}$ $O_6 \cdot R_m^\Delta(C_0^3, C_1^3) \quad m=\frac{n-6}{12}$ $O_6 C_0 C_1 R_m^\Delta(C_0^3, C_1^3) \quad m=\frac{n-14}{12}$ $C_0 R_m^\Delta(C_0^3, C_1^3) \dot{\cup} C_1 R_m^\Delta(C_0^3, C_1^3) \quad m=\frac{n-2}{12}$ $O_6 C_0 R_m^\Delta(C_0^3, C_1^3) \dot{\cup} O_6 C_1 R_m^\Delta(C_0^3, C_1^3) \quad m=\frac{n-10}{12}$	m	3) tauscht die Komponenten

G	π_G	$I_n(\pi_G)$	dim	Aktion von $\mathcal{M}(g)/g$
S_4	abhängig von n ($n \neq 1(3)$)	$n = 6v_1 + 8v_2 + 12v_3 + 24s$ ($v_i \in \{0;1\}, s \in \mathbb{N}_0$) $0_6^v 1(C_0 C_1)^2 (C_0^3 + C_1^3)^3 R_s^\Delta((C_0^3 + C_1^3)^2 (C_0 C_1)^3)$ $= 0_6^v 1(C_0 C_1)^2 \cdot s_m^\Delta(C_0^3, C_1^3) \quad (m=2s+v_3)$	s	$\mathcal{M}(\mathcal{P}_4)/\mathcal{P}_4=1$
A_5	abhängig von n $n=0,2,12,$ $20 \bmod 30$	$n = 12v_1 + 20v_2 + 30v_3 + 60s$ ($v_i \in \{0;1\}, s \in \mathbb{N}_0$) $f_1^v H^2 T^3 R_s^\Delta(T^2, H^3)$	s	$\mathcal{M}(\mathcal{A}_5)/\mathcal{A}_5=1$
1)	Durch Dehomogenisieren, Normieren und ggf. Division durch XY erhält man die Parameterräume aus den Kapiteln 1. und 2. Dort wird die Wirkung des Normalisators beschrieben. Die Aussagen von (1.5) gelten auch im Fall $r=2$.			
2)	vgl. 3.4.3.2			
3)	vgl. Folgerung (3.21)			

Die Begründung der Aussagen der obigen Tabelle ist trivial und ergibt sich aus (3.15). Beispielhaft sei dies im Fall $\pi_G = D_r(0,1)$ erläutert:

M enthält genau eine r-elementige Ausnahmebahn und sonst $2r$ -elementige Bahnen, nach 3.2.1.2 gilt

$$M = \{1, \xi, \xi^2, \dots, \xi^{r-1}\} \cup \bigcup_{i=1}^s \{\text{Bahnen der Länge } 2r\}$$

oder

$$M = \{\zeta, \zeta\xi, \zeta\xi^2, \dots, \zeta\xi^{r-1}\} \cup \bigcup_{i=1}^s \{\text{Bahnen der Länge } 2r\}.$$

Nach (3.15) entspricht dies

$$F \in (X^r - Y^r) R_s^\Delta((X^r - Y^r)^2, (X^r + Y^r)^2)$$

oder

$$F \in (X^r + Y^r) R_s^\Delta((X^r - Y^r)^2, (X^r + Y^r)^2)$$

und (3.19) zeigt, daß dies gleichwertig ist zu

$$F \in s_s^\Delta(X^r, Y^r) \text{ oder } F \in a_s^\Delta(X^r, Y^r).$$

3.4.3.2 Die Invariantenräume von V_4

Etwas kompliziertere Verhältnisse als bei den übrigen Gruppen findet man bei der Klein'schen Vierergruppe, bedingt durch ihre höhere Symmetrie, die durch die drei ununterscheidbaren Ausnahmebahnen und den relativ größten Normalisator erkennbar wird. Für jedes n treten jeweils zwei Isomorphietypen auf, ein "symmetrischer" und ein "unsymmetrischer" Fall:

- Die unsymmetrischen Fälle $V_4(1)$ und $V_4(2)$

Unsymmetrie bedeutet, daß die Ausnahmebahnen durch ihre Lage in bzw. außerhalb von M unterscheidbar werden. Die Formen aus $I_n(V_4(1))$ bzw. $I_n(V_4(2))$ (also $n=2(4)$ bzw. $n=0(4)$) enthalten jeweils 1 bzw. zwei der Grundformen X^2+Y^2 und XY als Faktoren, mit Satz (3.15) ergibt sich

$$I_n(V_4(2)) = XY(X^2+Y^2)S_{2k}^\Delta(X^2, Y^2) \cup XY(X^2-Y^2)S_{2k}^\Delta(X^2, Y^2) \cup (X^4-Y^4)S_{2k}^\Delta(X^2, Y^2) \\ (\text{mit } k=\frac{n-4}{4})$$

bzw.

$$I_n(V_4(1)) = (X^2-Y^2)S_{2k}^\Delta(X^2, Y^2) \cup (X^2+Y^2)S_{2k}^\Delta(X^2, Y^2) \cup XY S_{2k}^\Delta(X^2, Y^2) \\ (\text{mit } k=\frac{n-2}{4}).$$

Der Normalisator $\mathcal{P}_4 = \mathcal{N}(V_4)$ wird über V_4 von ω und χ erzeugt (vgl. 3.1.3). ω tauscht die Ausnahmebahnen von V_4 zyklisch, induziert also Isomorphismen der 3 Komponenten von $I_n(V_4(i))$ ($i=1,2$). χ tauscht die Bahnen $\{\pm 1\}, \{\pm i\}$ und läßt $\{0, \infty\}$ fest. Die Operation von $\mathcal{N}(V_4)$ kann also auf die von χ auf $XY \cdot S_{2k}^\Delta(X^2, Y^2)$ bzw. $(X^4-Y^4) \cdot S_{2k}^\Delta(X^2, Y^2)$ reduziert werden.

$S_{2k}^\Delta(X^2, Y^2)$ stimmt nach dem Dehomogenisieren vermöge $Y=1$ und nach Normierung mit dem Raum $T_{4k,2}^+$ in Satz (2.13) überein. χ ist in diesem Sinn mit $\delta_{4k,2}$ aus diesem Satz identisch. Dies zeigt, daß der Quotient nach χ für $k > 2$ singulär ist.

- Die symmetrischen Fälle $V_4(0)$ und $V_4(3)$

Die Formen aus $I_n(V_4(0))$ zerfallen aufgrund von Lemma (3.10) in Faktoren

$$X^4 - \mu X^2 Y^2 + Y^4 = \mu_1 C_0 - \mu_0 C_1$$

(mit $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{\pm 2\}$, $[\mu_0, \mu_1] \neq [1, \rho^i]$ für $i=0,1,2$ mit einer 3. primitiven Einheitswurzel ρ).

Daraus erhält man die Angaben der Tabelle in 3.4.3.1 für $V_4(i)$ ($i=0;3$) mit einer Beschreibung der Separabilitätsbedingung:

Lemma (3.20): a) $I_n(V_4(0)) = S_{2k}^\Delta(X^2, Y^2) = R_k^\Delta(C_0, C_1)$
 $= \{ F = \sum_{i=0}^k \sigma_i C_0^i C_1^{k-i} \mid \sigma_i \in k, F \text{ separabel in } C_0, C_1$
 $\text{und } \sum_{i=0}^k \sigma_i \rho^{ij} \neq 0 \text{ für } j=0,1,2 \}$

mit $k = \frac{n}{4}$.

b) $I_n(V_4(3)) = O_6 R_k^\Delta(C_0, C_1) = O_6 S_{2k}^\Delta(X^2, Y^2)$
 mit $k = \frac{n-6}{4}$.

Beweis:

a) $I_n(V_4(0)) = R_k^\Delta((X^2 - Y^2)^2, X^2 Y^2)$ (3.15)

$= S_{2k}^\Delta(X^2, Y^2)$ (3.19)

$= R_k^\Delta(C_0, C_1)$ (3.10) mit Beweis von (3.15),
 Teil a).

Die letzte Gleichung ist klar bis auf die Separabilitätsbedingung

$$\sum_{i=0}^k \sigma_i \rho^{ij} \neq 0$$

Diese ergibt sich aus der Separabilitätsbedingung für $\mu_1 C_0 - \mu_0 C_1$
 $[\mu_0, \mu_1] \neq [1, \rho^i] \quad (i=0,1,2)$.

b) ergibt sich aus a) wenn man beachtet, daß O_6 die Vereinigung der 3 V_4 -Ausnahmebahnen als Nullstellenmenge besitzt. (3.2.1.2)

Es bleibt noch die Wirkung des Normalisators $\mathcal{Y}_4$ auf $I_n(V_4(i))$ ($i=0;3$) zu untersuchen, zu diesem Zweck ist die Erzeugung der Invariantenräume durch C_0, C_1 sinnvoll, weil ω bzw. χ nach 3.2.3.2 durch die Substitutionen

$$\begin{array}{ll} \omega : C_0 \longmapsto \rho C_0 & \chi : C_0 \longmapsto -C_1 \\ C_1 \longmapsto \rho^2 C_1 & C_1 \longmapsto -C_0 \end{array}$$

beschrieben werden. Mit den Bezeichnungen

$$C := C_0 \text{ und } D := -C_1$$

vereinfacht sich die Beschreibung zu

$$\begin{array}{ll} \omega : C \longmapsto \rho C & \chi : C \longmapsto D \\ D \longmapsto \rho^2 D & D \longmapsto C \end{array}$$

Bei beiden Isomorphietypen genügt es, die Aktion von $\mathcal{Y}_4$ auf dem Raum

$R_k(C_0, C_1)$ zu beschreiben:

Es bezeichne $\hat{R}_k(U, V)$, $\hat{S}_k(U, V)$ und $\hat{A}_k(U, V)$ jeweils die den projektiven Räumen $R_k(U, V)$, $S_k(U, V)$ und $A_k(U, V)$ zugrundeliegenden affinen Räume binärer Formen vom Grad k .

Die obigen Substitutionen ω und χ ergeben eine Linearisierung der $\mathcal{Y}_4/\mathcal{V}_4$ -Aktion. Die Summanden der isotypischen Zerlegung von $\hat{R}_k(C, D)$ seien mit S_1 , S_{-1} und S_2 bezeichnet (entsprechend der trivialen Darstellung, der Darstellung mit Kern $\mathbb{Z}_3$ und der zweidimensionalen Darstellung von $\mathcal{Y}_4/\mathcal{V}_4 \simeq \mathbb{Z}_3$):

$$\hat{R}_k(C, D) = S_1 \oplus S_{-1} \oplus S_2$$

Dies ergibt folgende Tabelle für die isotypische Zerlegung von

$\hat{R}_k(C_0, C_1) = \hat{R}_k(C, D)$ bezüglich der $\mathcal{Y}_4/\mathcal{V}_4$ -Aktion:

$k \bmod 3 \quad ^1)$	0 $m = \frac{k}{3}$	1 $m = \frac{k-4}{3}$	2 $m = \frac{k-2}{3}$
S_1	$\hat{S}_m(C^3, D^3)$	$C^2 D^2 \hat{S}_m(C^3, D^3)$	$CD \cdot \hat{S}_m(C^3, D^3)$
S_{-1}	$\hat{A}_m(C^3, D^3)$	$C^2 D^2 \hat{A}_m(C^3, D^3)$	$CD \cdot \hat{A}_m(C^3, D^3)$
S_2	$\bigoplus_{i=0}^{m-1} Z(3i+1)^2$	$\bigoplus_{i=0}^{m+1} Z(3i)^2$	$\bigoplus_{i=0}^m Z(3i+2)^2$
¹⁾ Es sei $k = \frac{n}{4}$ für $n \equiv 0(4)$ und $k = \frac{n-6}{4}$ für $n \equiv 2(4)$ ²⁾ $Z(x)$ bezeichne den Summanden $\langle C^x D^{k-x}, C^{k-x} D^x \rangle$. Die Darstellung von $\mathcal{Y}_4/\mathcal{V}_4$ auf $Z(x)$ ist unter den Voraussetzungen der Tabelle irreduzibel und zweidimensional.			

3.4.3.3 Die Operation von $\mathcal{N}(\mathcal{A}_4)/\mathcal{A}_4$ auf $I_n(\mathcal{A}_4)$

Folgerung(3.21): Auf $I_n(V_4)$ operiert $\mathcal{N}(V_4) = \mathcal{Y}_4$.

- a) Die Fixpunkte von $\mathcal{A}_4$ und $\mathcal{Y}_4$ in $I_n(V_4(0))$ bzw. $I_n(V_4(3))$ stimmen mit $I_n(\mathcal{A}_4)$ und $I_n(\mathcal{S}_4)$ überein.
- b) $I_n(\mathcal{A}_4)$ ist in den Fällen $n \neq 1(3)$ offener Teil eines affinen Raums $\mathbb{A}^m$ (m wie in 3.4.3.1). Die Operation von $\mathbb{Z}_2 \simeq \mathcal{N}(\mathcal{A}_4)/\mathcal{A}_4$ wird von χ induziert und bewirkt eine lineare Involution mit $\frac{m}{2}$ bzw. $\frac{m+1}{2}$ Eigenwerten -1 (für $m \equiv 0(2)$ bzw. $m \equiv 1(2)$). Im Fall $n \equiv 1(3)$ vertauscht χ die Komponenten von $I_n(\mathcal{A}_4)$.

Beweis:

a) Aus $V_4 < \mathcal{A}_4 = \langle V_4, \omega \rangle < \mathcal{Y}_4 = \langle \mathcal{A}_4, \chi \rangle$ folgt, daß die Fixpunkte von ω bzw. ω, χ in $I_n(V_4(i))$ für $i=0;3$ in $I_n(\mathcal{A}_4)$ bzw. $I_n(\mathcal{S}_4)$ enthalten sind. Die Ausnahmebahnen der Vierergruppe bilden genau eine Ausnahmebahn von $\mathcal{A}_4$ bzw. $\mathcal{Y}_4$. Dies zeigt, daß die Invarianten von $\mathcal{A}_4$ bzw. $\mathcal{Y}_4$ nur in $I_n(V_4(0))$ bzw. $I_n(V_4(3))$ liegen können. Weil sie in $I_n(V_4)$ liegen müssen, zeigt dies den Teil a).

b) $\mathcal{N}(\mathcal{A}_4) = \mathcal{Y}_4$ wird über $\mathcal{A}_4$ von χ erzeugt. χ tauscht die Ausnahmebahnen T_0 und T_1 von $\mathcal{A}_4$, die den Faktoren C_0 und C_1 entsprechen. Dies zeigt den letzten Satz von b).

Für $n \neq 1(3)$ ist $I_n(\mathcal{A}_4)$ gemäß 3.4.3.1 (Tabelle) isomorph zu $R_m^{\Delta}(C_0^3, C_1^3) = R_m^{\Delta}(C^3, D^3)$. Für

$$F \in R_m^{\Delta}(C^3, D^3) \quad \text{d.h.} \quad F = \sum_{i=0}^m \sigma_i C^3 i D^{m-3i}$$

ergibt (3.20) die Separabilitätsbedingung

$$S := \sum_{i=0}^m \sigma_i (-1)^{m-i} \neq 0.$$

(-1 tritt auf, weil C_1 durch $-D$ ersetzt wurde. Die Potenzen der Einheitswurzel ρ entfallen, weil nur 3. Potenzen von C und D auftreten.)

Die Gleichung $S \neq 0$ definiert einen affinen Raum $\mathbb{A}^m$ in $R(C^3, D^3)$ der unter χ invariant ist. χ tauscht C^3 mit D^3 , so daß $\hat{R}_m(C^3, D^3)$ die isotypische Zerlegung

$$S_m(C^3, D^3) \oplus \hat{A}_m(C^3, D^3)$$

besitzt,

wobei χ auf der ersten Komponente trivial und auf der zweiten als $-1 \cdot \text{Id}$ operiert.

Stellt man $\hat{A}^m = R_m(C^3, D^3) \setminus V(S)$ als linearen Raum dar, so hängen die Dimensionen der isotypischen Komponenten von dem Eigenwert ab, den χ auf einem stabilen Komplement der Hyperebene $V(S)$ in $R_m(C^3, D^3)$ besitzt.

In Fall $m \equiv 0(2)$ ist dieser $+1$ und die Zahl der Eigenwerte -1 von χ auf $\hat{A}^m$ stimmt mit $\dim \hat{A}_m(C^3, D^3) = \frac{m}{2}$ überein. Im Fall $m \equiv 1(2)$ ist er -1 und die Zahl der Eigenwerte auf $\hat{A}^m$ ist $\dim \hat{S}_m(C^3, D^3) = \frac{m+1}{2}$. Dies ergibt die Behauptung.

4. Degeneration von Symmetrien und Modulprobleme

Die Elemente von $I_n(\pi_G)$ sind die binären Formen, für die die normierte Polyedergruppe $\mathcal{Q}$ eine lineare Permutationsgruppe (G, π) vom Typ π_G auf der Nullstellenmenge M bestimmt. $\mathcal{Q}$ ist jedoch nicht für alle Elemente von $I_n(\pi_G)$ gleich der vollen Symmetriegruppe von M (d.h. der reduzierten Automorphismengruppe der zugehörigen Kurve). Man wird fragen, welche Formen eine Erweiterung der linearen Permutationsgruppe (G, π) zu $(\bar{G}, \bar{\pi})$ in folgendem Sinn zulassen:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\pi} & S_M \\ \downarrow & \nearrow \bar{\pi} & \\ \bar{G} & & \end{array} \quad (\pi \text{ wird von } \bar{\pi} \text{ induziert})$$

In diesem Fall besitzt M eine größere Symmetriegruppe als nur $\mathcal{Q}$, dies ist gemeint, wenn im folgenden von der "Degeneration von Symmetriegruppen" gesprochen wird.

- Definition (4.1): a) Die Symmetrie(gruppe) der Wurzeln von F "degeneriert" bei den Elementen $F \in I_n(\pi_G)$, bei denen (G, π) eine Erweiterung zuläßt.
- b) Sie degeneriert zu $\bar{G}$ (bzw. $\pi_{\bar{G}}$), wenn die Aktion von G zu einer Aktion von $\bar{G}$ (vom Isomphietyp $\pi_{\bar{G}}$) erweitert werden kann, so daß $\bar{G} \hookrightarrow S_M$ die Aktion von G induziert. Diese Situation wird $(G, \pi) < (\bar{G}, \bar{\pi})$ geschrieben.
- c) Die Menge der Formen von $I_n(\pi_G)$, deren Symmetrie zu $\pi_{\bar{G}}$ degeneriert, wird mit $I_n(\pi_G, \pi_{\bar{G}})$ bezeichnet, entsprechend bezeichnet $I_n(G, \bar{G}) \subset I_n(G)$ die Formen, deren Symmetrie zu $\bar{G}$ degeneriert (ohne Beachtung des Isomphietyps).

In diesem Kapitel werden zunächst die möglichen Erweiterungen linearer Permutationsgruppen und die Teilräume $I_n(\pi_G, \pi_{\bar{G}})$ bestimmt. Dies führt zur Betrachtung der Mengen $\overline{M(\pi_{\bar{G}})} \subset M_k$ von Modulpunkten hyperelliptischer Kurven, die eine G -Aktion vom Typ $\pi_{\bar{G}}$ zulassen. Der Möglichkeit einer Erweiterung von π_G zu $\pi_{\bar{G}}$ entspricht die Inklusion $\overline{M(\pi_{\bar{G}})} \subset \overline{M(\pi_G)}$ und man erhält einen Graphen, der diese Inklusion für alle Paare linearer Permutationsgruppen beschreibt.

4.1. Beschreibung von $I_n(\pi_G, \pi_{\bar{G}})$ und $I_n(G, \bar{G})$ durch Morphismen von $I_n(\bar{G})$ nach $I_n(G)$

$G < \bar{G}$ bezeichne zwei abstrakte Polyedergruppen, g und $\bar{g}$ ihre normierten Repräsentanten in $\text{PGL}_2(k)$. Die Einbettungen der normierten Polyedergruppen vermöge Konjugation in $\text{PGL}_2(k)$ liefern Morphismen zwischen den Invariantenräumen $I_n(G)$:

$${}^\alpha g = \bar{g}$$

entspricht

$$\begin{array}{ccc} \alpha^{-1}: I_n(\bar{G}) & \hookrightarrow & I_n(G) \\ F & \longmapsto & \alpha^{-1} F \end{array}$$

(Ist nämlich F (projektive) Invariante von $\bar{g}$ und damit auch von ${}^\alpha g$, so ist $\alpha^{-1} F$ Invariante von g .)

Weil die Normalisatoren $\mathcal{N}(g)$ bzw. $\mathcal{N}(\bar{g})$ auf den Mengen $I_n(G)$ bzw. $I_n(\bar{G})$ operieren, ist es sinnvoll die Klassen

$$\mathcal{N}(\bar{g}) \propto \mathcal{N}(g), \quad \alpha \in \text{PGL}_2(k), \quad {}^\alpha g = \bar{g}$$

zu betrachten.

Die Rechtsnebenklassen $\alpha \mathcal{N}(g)$ entsprechen bijektiv den zu g isomorphen Untergruppen von $\bar{g}$. Auf der Menge dieser Untergruppen operieren $\bar{g}$ und $\mathcal{N}(\bar{g})$ vermöge Konjugation. Die Bahnen der $\bar{g}$ -Operation sind Konjugationsklassen im üblichen Sinn, die Bahnen der $\mathcal{N}(\bar{g})$ -Operation werden im folgenden als $\mathcal{N}(\bar{g})$ -Klassen bezeichnet. Die $\mathcal{N}(\bar{g})$ -Klassen entsprechen bijektiv den Klassen

$$\mathcal{N}(\bar{g}) \propto \mathcal{N}(g), \quad \alpha \in \text{PGL}_2(k), \quad {}^\alpha g = \bar{g}$$

und der folgende Satz zeigt, daß Repräsentanten dieser Klassen genügen, um $I_n(G, \bar{G})$ bzw. $I_n(\pi_G, \pi_{\bar{G}})$ durch die Bilder der von diesen Repräsentanten induzierten Morphismen

$$\alpha^{-1}: I_n(\bar{G}) \hookrightarrow I_n(G)$$

zu beschreiben.

Die Zerlegung der Mengen $I_n(G)$ nach den Isomorphietypen π_G linearer Permutationsgruppen wird von diesen Morphismen allerdings nicht respektiert wie das folgende Beispiel zeigt:

Für $n \equiv 2(4)$ und $s = \frac{n}{2}$ ist

$$I_n(\mathbb{Z}_2) = I_n(\mathbb{Z}_2(0)) \dot{\cup} I_n(\mathbb{Z}_2(2)) = R_s(X^2, Y^2) \dot{\cup} XY \cdot R_{s-1}(X^2, Y^2)$$

und

$$I_n(V_4(1)) = (X^2 - Y^2) \cdot S_{s-1}(X^2, Y^2) \dot{\cup} (X^2 + Y^2) \cdot S_{s-1}(X^2, Y^2) \dot{\cup} XY \cdot S_{s-1}(X^2, Y^2)$$

Die triviale Einbettung $\text{id}: \mathbb{P}_2 \hookrightarrow \mathbb{P}_4$ liefert $\text{id}: I_n(V_4) \hookrightarrow I_n(Z_2)$
 Die ersten beiden Komponenten von $I_n(V_4(1))$ werden aber nach
 $I_n(Z_2(0))$ abgebildet und die dritte Komponente nach $I_n(Z_2(2))$
 (Die Elemente der ersten beiden Komponenten besitzen die Fixpunkte
 $0, \infty$ von $x \rightarrow -x$ nicht in M , die Nullstellenmenge M der Formen der
 dritten Komponente enthält $0, \infty$.)

Dies zeigt, daß der von id induzierte Morphismus die Zerlegung in
 die Mengen $I_n(\pi_G)$ nicht respektiert.

Man sieht an diesem Beispiel ferner, daß auch der Übergang zu
 Morphismen

$$I_n(\bar{G})/\mathcal{N}(\bar{g}) \longrightarrow I_n(G)/\mathcal{N}(g)$$

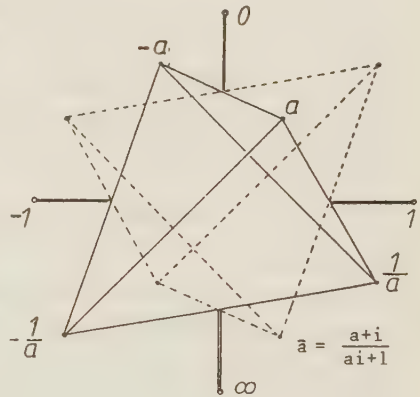
nicht möglich ist. Dies ergibt sich da-
 raus, daß ein vierzähliges Element von
 $\mathcal{N}(V_4)$ mit der Achse $(-1) - 1$ die beiden
 skizzierten Konfigurationen von Null-
 stellen binärer Formen aus

$$(X^2 - Y^2) \cdot S_2(X^2, Y^2) \in I_6(V_4(1))$$

nämlich

$$\{0, \infty, a, -a, \frac{1}{a}, -\frac{1}{a}\} \text{ und } \{0, \infty, \bar{a}, -\bar{a}, \frac{1}{\bar{a}}, -\frac{1}{\bar{a}}\}$$

vertauscht, was durch die Operation von
 $D = \mathcal{N}(\mathbb{P}_2)$, erzeugt von "Drehungen" um die
 Achse $0 - \infty$ und der Involution mit der
 Achse $(-1) - 1$, nicht möglich ist.



Satz (4.2) liefert jetzt die Beschreibung der Mengen $I_n(G, \bar{G})$ und
 $I_n(\pi_G, \pi_{\bar{G}})$:

Satz (4.2): Die Zahl der $\mathcal{N}(\bar{g})$ -Konjugationsklassen der zu G iso-
 morphen Untergruppen von $\bar{g}$ sei mit p bezeichnet, g_i sei
 jeweils ein Repräsentant. Für $i \in \{1, \dots, p\}$ sei
 $\alpha_i \in \text{PGL}_2(k)$ so gewählt, daß

$$\alpha_i g_i = g.$$

Dann gilt:

$$a) \quad I_n(G, \bar{G}) = \bigcup_{i=1}^p \mathcal{N}(g) \alpha_i I_n(\bar{G})$$

b) Der Isomorphietyp der von $\bar{g}$ induzierten linearen Per-
 mutationsgruppen $g_i \subset \bar{g}$ ($i=1, \dots, p$) ist auf den Kompo-
 nenten von $I_n(\pi_{\bar{G}})$ konstant. K_i bezeichne die Vereinigung

der Komponenten von $I_n(\pi_G)$, auf denen g_i zum Isomorphietyp π_G gehört. Dann gilt

$$I_n(\pi_G, \pi_{\bar{G}}) = \bigcup_{i=1}^p \mathcal{N}(g)^{\alpha_i}_{K_i}$$

Beweis:

a1) $F \in I_n(\bar{G})$ läßt g_i zu, α_i also g . Die α_i liefern also Morphismen

$$I_n(\bar{G}) \xrightarrow{\alpha_i} I_n(G),$$

deren Bilder Kurven mit $\bar{G}$ -Aktion sind. Weil $\mathcal{N}(g)$ auf $I_n(G)$ operiert, ist die Inklusion " $\supset$ " in Teil a) gezeigt.

a2) Sei $F \in I_n(G, \bar{G})$, d.h. auf der Nullstellenmenge M von F operiert $\mathcal{K} \leq \text{PGL}_2(k)$, $\mathcal{K} \simeq \bar{g}$, $g < \mathcal{K}$. $\mathcal{K}$ ist konjugiert zu $\bar{g}$:

$$\alpha \mathcal{K} = \bar{g}, \alpha \in \text{PGL}_2(k) \quad (\Rightarrow \alpha g < \bar{g})$$

Also liegt F im Bild von $\alpha^{-1}: I_n(\bar{G}) \hookrightarrow I_n(G)$.

Für $i \in \{1, \dots, p\}$ liegt αg in der $\mathcal{N}(\bar{g})$ -Konjugationsklasse von g_i , d.h.

$$n \alpha g = g_i, n \in \mathcal{N}(\bar{g})$$

bzw.

$$g = \alpha^{-1} n^{-1} g_i$$

Vergleich mit $\alpha_i g_i = g$ zeigt $\gamma := \alpha^{-1} n^{-1} \alpha_i^{-1} \in \mathcal{N}(g)$ bzw.

$$\alpha^{-1} = \gamma \alpha_i n \in \mathcal{N}(g) \alpha_i \mathcal{N}(\bar{g}),$$

d.h. es ist

$$\alpha^{-1}_{I_n(\bar{G})} = \gamma \alpha_i_{I_n(\bar{G})}$$

(weil n auf $I_n(\bar{G})$ operiert) und es gilt

$$F \in \gamma \alpha_i_{I_n(G)}, \quad \gamma \in \mathcal{N}(g).$$

Damit ist Teil a) gezeigt.

b1) Der Isomorphietyp der Permutationsdarstellung von g_i hängt nur vom Auftreten der Ausnahmebahnen von g_i in der Nullstellenmenge von $F \in I_n(G)$ ab. Diese sind aber Teile der Ausnahmebahnen von g und daher durch die Komponenten von $I_n(\bar{G})$ bzw. $I_n(\pi_{\bar{G}})$ bestimmt. D.h. der Isomorphietyp ist auf den Komponenten konstant.

b2) Weil die Morphismen aus a) offensichtlich den Isomorphietyp der Permutationsdarstellung erhalten, ist die Gleichung aus b) klar.

Definition (4.3): Wie in Satz (4.2) bezeichne g_i die Repräsentanten der $\mathcal{N}(g)$ -Klassen der zu G isomorphen Untergruppen von G . Die für jeden Repräsentanten fest gewählten

$$\alpha_i \in \text{PGL}_2(k) \text{ mit } {}^{\alpha_i} g_i = g$$

werden als Normierungsabbildungen dieser Repräsentanten bezeichnet.

Folgerung (4.4): Wenn eine Erweiterung einer linearen Permutationsgruppe des Typs π_G zu einer linearen Permutationsgruppe des Typs $\pi_{\bar{G}}$ möglich ist, dann sind alle hyperelliptischen Kurven mit einer $\bar{G}$ -Aktion vom Typ $\pi_{\bar{G}}$ in $I_n(\pi_G)$ repräsentiert.

Beweis: Dies kann man aus der Tatsache schließen, daß der Isomorphietyp einer Untergruppe von $\bar{G}$ auf den Komponenten von $I_n(\pi_{\bar{G}})$ konstant ist und daß $\mathcal{N}(\bar{G})$ transitiv auf diesen operiert. Alle Kurven mit $\bar{G}$ -Aktion vom Typ $\pi_{\bar{G}}$ sind also bereits durch eine Komponente von $I_n(\pi_{\bar{G}})$ repräsentiert und diese wird nach $I_n(\pi_G)$ durch eine geeignete Normierungsabbildung abgebildet.

4.2 Untergruppen der Polyedergruppen, ihre $\mathcal{N}(G)$ -Konjugationsklassen und Permutationsdarstellungen

Satz (4.2) reduziert das Problem, die binären Formen aus $I_n(G)$ mit degenerierender Symmetrie zu bestimmen, auf die Untersuchung der Untergruppenklassen einer linearen Permutationsgruppe zusammen mit ihrer Permutationsdarstellung.

Im folgenden werden die Isomorphietypen der Permutationsdarstellungen der Untergruppen angegeben, dabei genügt es, sich auf Konjugationsklassen der Untergruppen von G zu beschränken:

Ist nämlich $F \in I_n(\pi_G)$ mit Nullstellenmenge M gegeben, so induziert

$$G \longrightarrow S_M$$

lineare Permutationsdarstellungen aller Untergruppen von G und die Untergruppen der gleichen Konjugationsklasse besitzen offensichtlich isomorphe Darstellungen.

Das folgende Beispiel zeigt, daß dies für Untergruppen aus der gleichen $\mathcal{N}(G)$ -Klasse nicht gelten muß:

$x^2 - y^2$ ist projektive Invariante von $\mathcal{V}_4 = \langle x \mapsto x, y \mapsto y^{-1} \rangle$.
 $\langle x \mapsto x^{-1}, y \mapsto y \rangle$ hat auf $M = \{1, -1\}$ zwei Fixpunkte, während $\langle x \mapsto -x, y \mapsto y \rangle$ fixpunktfrei ist. Beide Gruppen sind aber konjugiert in $\mathcal{N}(\mathcal{V}_4) = \mathcal{J}_4$.

4.2.1 Zyklische Gruppen

Die Untergruppenstruktur ist klar, alle Untergruppen von $\mathbb{Z}_r(p)$ ($p \in \{0, 1, 2\}$) sind zyklische Gruppen $\mathbb{Z}_{\hat{r}}(p)$ (mit $\hat{r} | r$) (vgl. 1.3).

4.2.2 Diedergruppen D_r ($r > 2$)

Die Konjugationsklassen der Diedergruppen $D_r < \text{PGL}_2(k)$ ergeben sich aus der folgenden Tabelle. Dazu sei wie bisher $D_r = \langle \alpha, t \rangle$ mit $\alpha^r = t^2 = t\alpha t = 1$. Die angegebenen Normierungsabbildungen beziehen sich auf $D_r = \mathcal{D}_r$.

Die Ergebnisse der Tabelle erhält man aus folgenden Überlegungen:

Es ist $\mathcal{N}(\mathcal{D}_r) = \mathcal{D}_{2r} = \langle \varepsilon, t \rangle$ mit $\varepsilon^2 = \alpha$. ε operiert auf den Konjugationsklassen von $\mathcal{D}_r$ und vertauscht im Fall $r \equiv 0(2)$ die Klassen von $\langle t \rangle$ und $\langle \alpha t \rangle$ sowie $\langle \alpha^s, t \rangle$ und $\langle \alpha^s, \alpha t \rangle$ ($s = \frac{r}{2}$). Alle $\mathcal{N}(\mathcal{D}_r)$ -klassen mit Ausnahme der nichtzentralen, zweizähligen Involutionen haben einen Repräsentanten, der in normierter

Form vorliegt, die Normierungsabbildungen sind also trivial.

$\delta: x \mapsto (x-1)(x+1)^{-1}$ bildet die Fixpunkte $+1, -1$ von $t \in D_r$ auf die Fixpunkte $0, \infty$ von $x \mapsto -x$ ab, d.h. es gilt

$$\delta \langle t \rangle = \langle x \mapsto -x \rangle$$

und δ ist eine Normierungsabbildung für $\langle t \rangle$.

	$\mathcal{N}(D_r)$ - Konjugations- klassen	Konjugations- klassen	Repräsentanten	Normierungs- abbildung
$r \equiv 0(2)$				
$Z_{\hat{r}}^{-1})$	1	1	$\langle \alpha^{r/\hat{r}} \rangle$	id
Z_2	2	1 (Normal- teiler)	$\langle \alpha^{r/2} \rangle$	id
		2 (Nichtnor- malteiler)	$\langle t \rangle$ bzw. $\langle \alpha t \rangle$	$\delta: x \mapsto \frac{x-1}{x+1}$
V_4	1	2 für $r \equiv 0(4)$	$\langle \alpha^{r/2}, t \rangle$	id
		1 für $r \equiv 2(4)$	$\langle \alpha^{r/2}, \alpha t \rangle^2$	
$D_{\hat{r}}^{-1})$	1	2 für $\frac{r}{\hat{r}} \equiv 0(2)$	$\langle \alpha^{r/\hat{r}}, t \rangle$	id
		1 sonst	$\langle \alpha^{r/\hat{r}}, \alpha t \rangle^2$	
$r \equiv 1(2)$				
$Z_{\hat{r}}^{-1})$	1	1	$\langle \alpha^{r/\hat{r}} \rangle$	id
Z_2	1	1	$\langle t \rangle$	$\delta: x \mapsto \frac{x-1}{x+1}$
$D_{\hat{r}}^{-1})$	1	1	$\langle \alpha^{r/\hat{r}}, t \rangle$	id
¹⁾ $\hat{r} r; \hat{r} \geq 3$ ²⁾ entfällt, falls $\frac{r}{\hat{r}}$ bzw. $\frac{r}{2}$ ungerade ist				

Daraus ergibt sich die folgende

Tabelle der Isomorphietypen von Untergruppen linearer Permutations-
gruppen vom Isomorphietyp $D_r(p, q)$

(Die Untergruppendiagramme enthalten jeweils einen Repräsentanten jeder D_r -Konjugationsklasse, eingezeichnet sind nur die Untergruppen zu je-
weils einem Teiler $\hat{r}$ von r , sowie die Gruppen Z_2 . Der Normalteiler
 Z_2 von D_r ist in eckige Klammer gesetzt, er ist nur für $\hat{r} \equiv 0(2)$ Unter-
gruppe von $Z_{\hat{r}}$.

Es gilt $n = rs + p; p \in \{0; 2\}$. Im Fall $r=2$ werde $D_r(p, q)$ durch $V_4(\frac{p}{2} + q)$
ersetzt.)

π_{D_r}	$r \equiv 0(2)$	
	$r:\hat{r} \equiv 0(2)$	$r:\hat{r} \equiv 1(2)$
$D_r(p,q)$ $q \in \{0,2\}$		
$D_r(p,1)$		
$D_r(p,q)$ $q \in \{0,2\}$	$r \equiv 1(2)$	

Beweis: Die Aussagen sind Folgerungen aus (2.18). Nicht erwähnt wurde dort der Isomorphietyp der Permutationsdarstellung der Klassen nicht-zentraler Involutionen. Ihre Fixpunkte liegen in den r -elementigen Ausnahmebahnen von D_r . Im Fall $D_r(p,q)$, $q \in \{0,2\}$ (d.h. keine oder zwei Ausnahmebahnen der Länge r in M) haben diese Involutionen entsprechend keinen oder zwei Fixpunkte in M . Im Fall des Isomorphietyps $D_r(p,1)$ (also $r \equiv 0(2)$) sind nach Bemerkung (2.4) die Involutionen einer Konjugationsklasse vom Isomorphietyp $Z_2(2)$, die anderen vom Typ $Z_2(0)$.

4.2.3 Vierergruppen

Jede Vierergruppe enthält 3 zyklische Untergruppen Z_2 , die in $\mathcal{N}(V_4)$ konjugiert sind (vermöge einer dreizähligen Drehung um eine Würfel diagonale, vgl. 3.1.3), es gibt also nur eine $\mathcal{N}(V_4)$ -Klasse. Weil die normierte Gruppe V_4 die Gruppe Z_2 als Untergruppe enthält, genügt als Normierungsabbildung die Identität. Von den zyklischen Untergruppen gehören genauso viele zum Isomorphietyp $Z_2(2)$ wie die Vierergruppe Ausnahmehalben in M besitzt, die übrigen sind vom Typ $Z_2(0)$.

4.2.4 Tetraedergruppen

Jede Tetraedergruppe $A_4 < \text{PGL}_2(k)$ besitzt je eine Konjugationsklasse der Gruppen Z_2, Z_3, V_4 . Diese Konjugationsklassen müssen daher mit den $\mathcal{N}(A_4)$ -Konjugationsklassen übereinstimmen.

Die normierte Gruppe A_4 enthält die normierten Gruppen Z_2 und V_4 , für diese Klassen genügt die Identität als Normierungsabbildung. Es bleibt nur die Normierungsabbildung der Gruppe $Z_3 = \langle \omega \rangle < A_4$ zu bestimmen ($\omega: x \mapsto i(x+1)(x-1)^{-1}$, vgl. 3.1.3):

Lemma (4.5): Es sei $\tau: x \mapsto (a_0 x + i)(x - a_0)^{-1}$ mit

$$a_0 = \xi \frac{1 - \sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \quad \xi^2 = i$$

(also ξ 8. primitive Einheitswurzel und a_0 ein Fixpunkt von ω).

Dann gilt:

$$\tau \langle \omega \rangle = Z_3$$

$$\tau \langle \omega ; x \mapsto -ix^{-1} \rangle = D_3,$$

d.h. τ ist Normierungsabbildung für die Konjugationsklassen von D_3 und Z_3 in V_4 bzw. A_4 .

Beweis: τ^{-1} bildet die Fixpunkte $\{0, \infty\}$ von $\alpha: x \mapsto \rho x$ ($\langle \alpha \rangle = Z_3$) und $\{1\}$ von $x \mapsto x^{-1} \in D_3$ auf die Fixpunkte $\{a_0; -ia_0^{-1}\}$ von ω bzw. $\{\pm i\xi\}$ von $x \mapsto -ix^{-1}$ ab. Dies zeigt

$$\begin{aligned} \tau \omega \tau^{-1} &= (x \mapsto \rho x) \\ \tau (x \mapsto -ix^{-1}) \tau^{-1} &= (x \mapsto x^{-1}) \end{aligned}$$

Für die Isomorphietypen der Untergruppen einer linearen Permutationsgruppe A_4 ergeben sich die folgenden Diagramme:

$n \equiv 0(12)$	$n \equiv 4(12)$	$n \equiv 8(12)$
$n \equiv 14(12)$	$n \equiv 10(12)$	$n \equiv 6(12)$

Beweis: O.E. betrachte man eine Darstellung von A_4 als normierte Polyedergruppe $\mathcal{A}_4$. Das Oktaeder $\mathcal{O}_6$ enthält alle Fixpunktpaare von Involuitionen. Die Isomorphietypen $V_4(3)$ und $Z_2(2)$ treten also genau dann auf, wenn $\mathcal{O}_6$ in M liegt, dies ist der Fall für $n \equiv 6, 10, 14 (12)$. Die übrigen Isomorphietypen erkennt man entsprechend.

4.2:5 Oktaedergruppen

Die Konjugationsklassen, Repräsentanten der Konjugationsklassen und die zugehörigen Normierungsabbildungen ergeben sich aus der folgenden Tabelle. (Wegen $\mathcal{Y}_4 = \mathcal{N}(\mathcal{Y}_4)$ fallen die $\mathcal{N}(\mathcal{Y}_4)$ -Klassen mit den Konjugationsklassen im üblichen Sinn zusammen.).

Die Angaben der Tabelle sind offensichtlich mit Ausnahme der Form der Normierungsabbildung o. o bildet die Fixpunkte von $x \mapsto ix^{-1}$ auf das Paar $\{0, \infty\}$ ab, also gilt ${}^o(x \mapsto ix^{-1}) = (x \mapsto -x)$. Weil sogar die Fixpunktpaare von $\langle x \mapsto -x, x \mapsto ix^{-1} \rangle$ auf die von $\mathcal{V}_4 = \langle x \mapsto -x, x \mapsto x^{-1} \rangle$ abgebildet werden, gilt

$${}^o \langle x \mapsto -x, x \mapsto ix^{-1} \rangle = \mathcal{V}_4$$

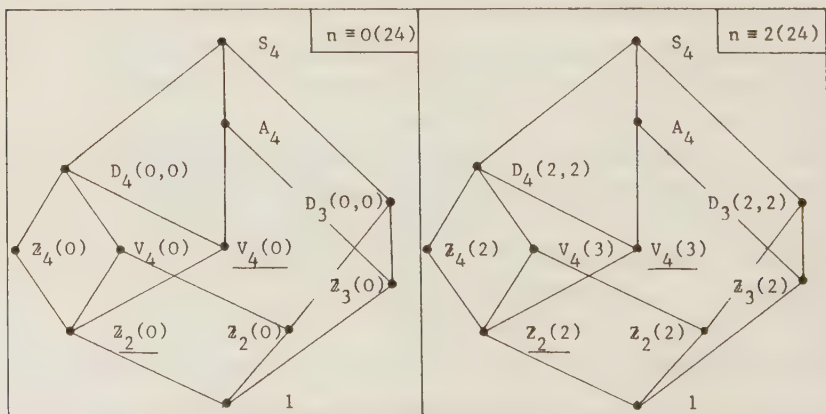
Dies war zu zeigen.

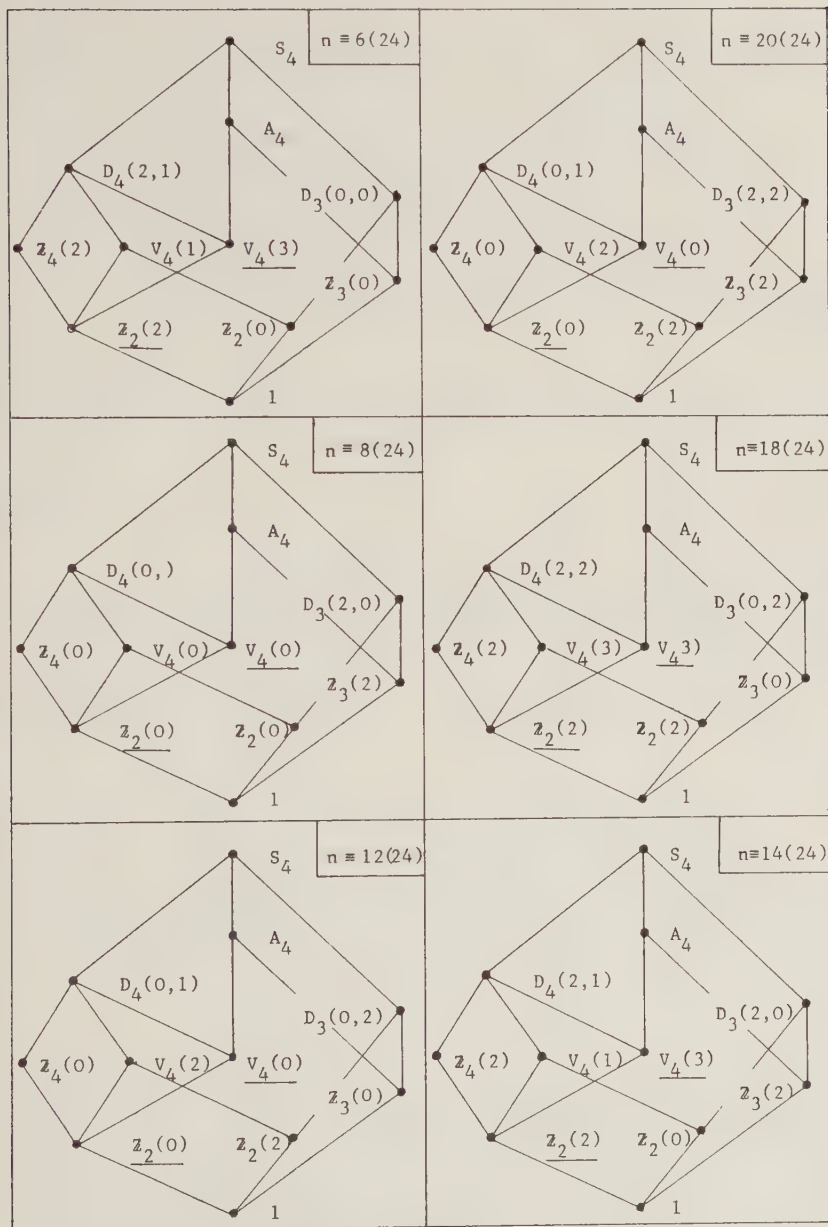
Konjugationsklassen			Repräsentanten	Normierungsabbildung
$\underline{Z_2}$	2	Quadrate	$\langle x \mapsto -x \rangle$	id
		Nichtquadrate	$\langle x \mapsto \frac{i}{x} \rangle$	$0: x \mapsto \frac{x-\xi}{x+\xi} \quad (\xi^2=i)$
$\underline{Z_3}$	1		$\langle \omega: x \mapsto i \frac{x+1}{x-1} \rangle$	τ aus Lemma (4.5)
$\underline{Z_4}$	1		$\langle \chi: x \mapsto ix \rangle$	id
V_4	2	Normalteiler	$\mathcal{V}_4$ (vgl. 3.1.3)	id
		Nichtnormalteiler	$\langle x \mapsto -x, x \mapsto \frac{i}{x} \rangle$	$\alpha_8: x \mapsto \xi x$ oder 0
$\underline{D_3}$	1		$\langle \omega, x \mapsto \frac{-i}{x} \rangle$	τ aus Lemma (4.5)
$\underline{D_4}$	1		$\langle x \mapsto ix, x \mapsto \frac{1}{x} \rangle$	id
$\underline{A_4}$	1		$\mathcal{A}_4$	id

Man erhält folgende

Tabelle der Isomorphietypen von Untergruppen linearer Permutationsgruppen von Typ S_4

(Es wird wieder jeweils ein Repräsentant jeder Konjugationsklasse wiedergegeben. Die Klasse der zyklischen Gruppen $\underline{Z_2}$, die von Quadraten in S_4 erzeugt werden, und die normale Vierergruppe, die diese drei Involutionen enthält, sind unterstrichen.)





Beweis:

Die Isomorphietypen der Untergruppen von S_4 erhält man folgendermaßen:

O.E. werde eine Permutationsdarstellung von $\mathcal{Y}_4$ betrachtet. Das Auftreten der Ausnahmebahnen von $\mathcal{Y}_4$ wird ausschließlich von n bestimmt (vgl. Tabelle der Isomorphietypen in 3.2.2). Wenn der Oktaeder O in M enthalten ist, also für $n = 6, 18, 2(24)$, besitzen die Elemente der Ordnung 4 und ihre Quadrate Fixpunkte in M , d.h. die zugehörigen Isomorphietypen sind $\mathbb{Z}_4(2), V_4(3)$ (Normalteiler), $\mathbb{Z}_2(2)$ (von Quadrat erzeugt).

Entsprechend erhält man die Isomorphietypen der übrigen Untergruppen in Abhängigkeit vom Auftreten der übrigen $\mathcal{Y}_4$ -Ausnahmebahnen.

4.2.6 Ikosaedergruppen

Die Konjugationsklassen in $A_5 \leq \text{PGL}_2(k)$ stimmen wieder mit den $\mathcal{K}(A_5)$ -Klassen überein und es ergibt sich folgende Tabelle der Konjugationsklassen mit ihren Repräsentanten und Normierungsabbildungen:

Konjugationsklasse	Repräsentant in A_5	Normierungsabbildung
$\mathbb{Z}_2$	$\langle U: x \mapsto x^{-1} \rangle$	$x \mapsto \kappa \frac{x-1}{x+1}, \kappa \in k^\times$
V_4	$\langle U, T \rangle^{(3)}$	$\begin{aligned} \iota_1: x &\mapsto \kappa \frac{x-1}{x+1} \\ \kappa^2 &= \frac{(1+2i)}{\sqrt{5}} \quad 1) \end{aligned}$
$\mathbb{Z}_3$	$\langle T \circ S \rangle^{(3)}$	$\tau \circ \iota_1 (\tau \text{ aus (4.5)})^{4)}$
$\mathbb{Z}_5$	$\mathbb{Z}_5$	id
D_3	$\langle T \circ S, U \circ T \rangle^{(3)}$	$\iota_2^{2)}$
D_5	D_5	id
A_4	$\langle S^2 T S^{-1}, U, T \rangle^{(3)}$	ι_1

¹⁾ mit $\sqrt{5} = (\epsilon + \epsilon^4) - (\epsilon^2 + \epsilon^3)$, ϵ primitive 5. Einheitswurzel

²⁾ wird nicht berechnet, vgl. Beweis von (4.7), Teil 6

³⁾ vgl. 3.1.5 ⁴⁾ Es ist $\tau \circ \iota_1 \circ S^2 T S^{-1} = \mathbb{Z}_3$

Beweis:

Die Repräsentanten von $\mathbb{Z}_3$, D_3 und A_4 erhält man wie beim Beweis von Lemma (3.3) durch die Betrachtung der Permutationsdarstellung von A_5 auf einer fünfelementigen Menge.

Eine Normierungsabbildung für einen Repräsentanten von D_3 ist unübersichtlich, ihre Berechnung wird umgangen.

ι_1 bezeichne jetzt die Normierungsabbildung für die Vierergruppe $\langle S, T \rangle$. Für $\iota_1: x \mapsto \kappa(x-1)(x+1)^{-1}$ (zunächst $\kappa \in k^\times$) gilt

$$\iota_1 \langle U \rangle = \langle x \mapsto -x \rangle$$

weil ι_1 das Fixpunktpaar $+1, -1$ von U auf das Fixpunktpaar $0, \infty$ von $x \mapsto -x$ abbildet. ι_1 ist also Normierungsabbildung für $\langle U \rangle$.

Weil alle $\langle x \mapsto -x \rangle$ enthaltenden Vierergruppen von der Form

$$\langle x \mapsto -x, x \mapsto cx^{-1} \rangle \quad (c \in k^\times)$$

sind, gilt dies auch für $\iota_1 \langle U, T \rangle$ und es muß insbesondere

$$\iota_1 T = (x \mapsto cx^{-1})$$

sein. Durch geeignete Wahl von κ , die einer Drehung der Riemann'schen Zahlenkugel um die Achse $0 - \infty$ entspricht, erreicht man $c=1$.

Man erhält

$$\kappa^2 = \frac{1+2i}{\sqrt{5}}$$

wobei ε und i wie in 3.1.5 gewählt werden. In diesem Fall gilt

$$\iota_1 \langle U, T \rangle = \mathcal{A}_4.$$

Die $\langle U, T \rangle$ bzw. $\mathcal{A}_4$ enthaltenden Tetraedergruppen von $\text{PGL}_2(k)$ sind gemäß 3.1.3 eindeutig bestimmt, also muß ι_1 auch Normierungsabbildung für die Klasse der Tetraedergruppen von $\mathcal{A}_5$ sein.

Eine Normierungsabbildung für $\mathbb{Z}_3$ ergibt sich mit Hilfe von Lemma (4.5) weil τ die zyklische Gruppe $\langle \omega \rangle \cong \mathbb{Z}_3$ von $\mathcal{A}_4$ auf $\mathcal{J}_3$ abbildet. D.h.

$$\tau \iota_1 \langle S^2 T S^{-1} \rangle = \mathcal{J}_3$$

Mehr ist nicht zu zeigen.

Die Isomorphietypen der Untergruppen einer linearen Permutationsgruppe A_5 sind leicht zu erhalten, weil jeweils nur eine Konjugationsklasse auftreten kann. Das Auftreten der Ausnahmebahnen der Länge $\frac{n}{i}$ wird durch n bestimmt; wenn eine solche Bahn in M liegt, entspricht dies dem Auftreten von zwei Fixpunkten der Elemente der Ordnung i . Dies führt zu folgender Tabelle:

Tabelle der Isomorphietypen von Untergruppen linearer Permutationsgruppen vom Typ A_5

$n=12(60)$	$n=20(60)$	$n=30(60)$
$n=50(60)$	$n=42(60)$	$n=32(60)$
$n=0(60)$	$n=2(60)$	

4.3 Die Mengen $\overline{M(\pi_G)}$ der Modulpunkte von Kurven, die eine G-Aktion zulassen und Beziehungen zwischen diesen Mengen.

Die Frage nach den möglichen Erweiterungen einer linearen Permutationsgruppe (G, π) kann mit Abschnitt 4.2 beantwortet werden, wenn man feststellt, in welchen linearen Permutationsgruppen $(\overline{G}, \overline{\pi})$ Untergruppen (G, π) enthalten sind. Dies wird im folgenden Satz (4.6) zusammengefaßt.

Er erlaubt aber auch noch eine andere Betrachtungsweise, die man durch Übergang zur Modulmannigfaltigkeit hyperelliptischer Kurven erhält.

Die Restriktion der Quotientenabbildung

$$R_n^{\Delta} \longrightarrow M_k$$

des Raumes der binären, separablen Formen von Grad n in die Modulmannigfaltigkeit hyperelliptischer Kurven vom Geschlecht g ($n=2g+2$) auf die Invariantenräume $I_n(\pi_G)$ liefert Morphismen

$$I_n(\pi_G) \longrightarrow M_k$$

deren Bilder genau die Modulpunkte von Kurven mit G-Aktion vom Typ π_G enthalten. Im Kapitel 7 wird gezeigt, daß diese Mengen eine Art Stratifikation der Modulmannigfaltigkeit liefern. Sie werden wie folgt bezeichnet:

Definition (4.5): Es bezeichne

$$\overline{M(\pi_G)} = \{P \in M_k \mid P \text{ ist Modulpunkt einer Kurve mit } G\text{-Aktion vom Typ } \pi_G\}$$

$$M(\pi_G) = \{P \in M_k \mid \text{Es ist } A \simeq G \text{ und die Aktion von } A \text{ ist vom Typ } \pi_G\}$$

($M(\pi_G)$ besteht also genau aus den Modulpunkten von von Kurven mit G-Aktion, die keine Erweiterung mehr zulassen.)

Wenn eine Erweiterung der linearen Permutationsgruppe (G, π) zu $(\overline{G}, \overline{\pi})$ möglich ist, so bedeutet dies nach (4.4), daß jede $\overline{G}$ -Aktion vom Typ $\pi_{\overline{G}}$ auf der Verzweigungsmenge einer hyp. Kurve Erweiterung einer G-Aktion vom Typ π_G ist. Dies bedeutet mit den obigen Bezeichnungen:

$$\overline{M(\pi_{\overline{G}})} \subset \overline{M(\pi_G)}$$

Das Diagramm von Satz (4.6) kann also auch als Diagramm der Inklusionen der Mengen $\overline{M(\pi_G)}$ von M_k gedeutet werden.

Satz (4.6): Die folgenden Diagramme stellen die möglichen Erweiterungen linearer Permutationsgruppen dar. Jeder Erweiterung einer Gruppe von Isomorphietyp π_{G_1} zu einer Gruppe von Typ π_{G_2} entspricht die Inklusion:

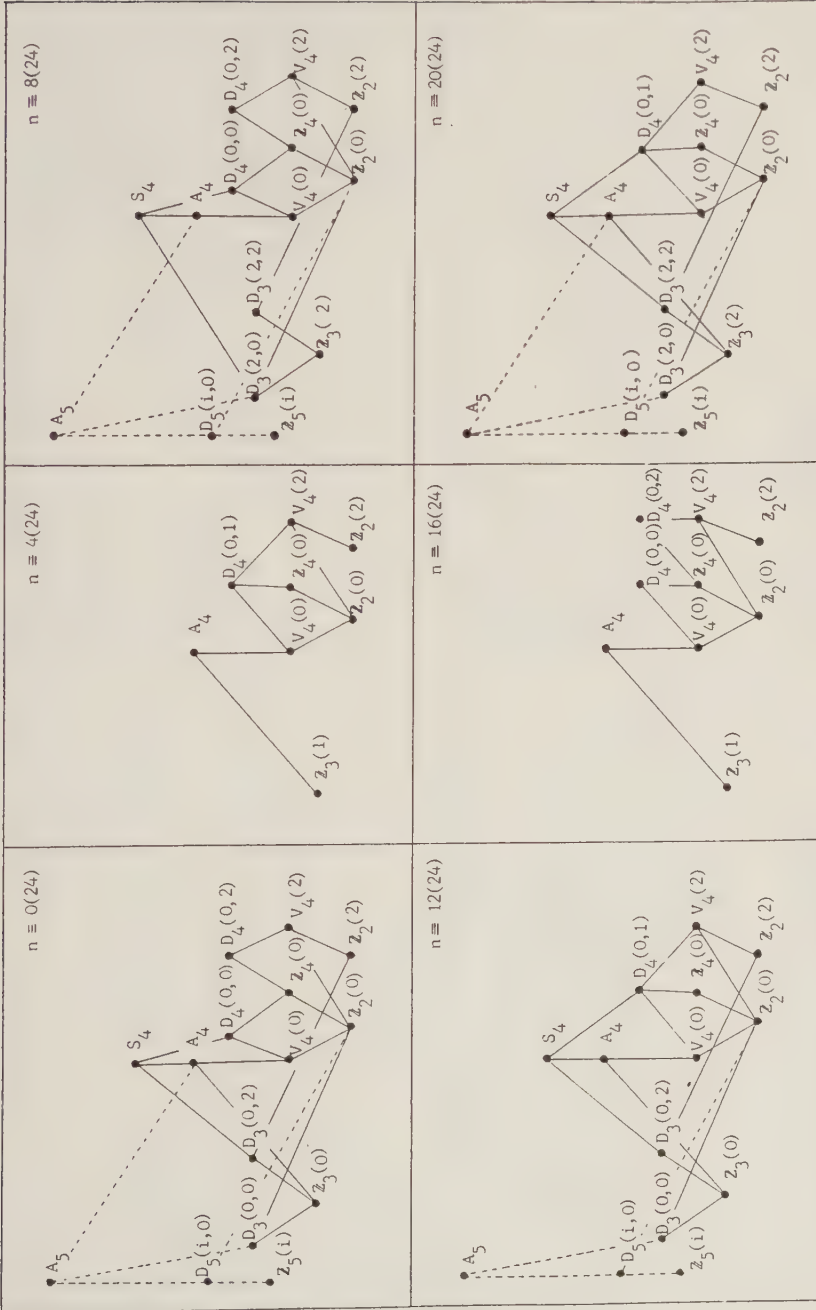
$$\overline{M(\pi_{G_2})} \subset \overline{M(\pi_{G_1})}$$

Jedem $n \in 2\mathbb{N}$ ($n \geq 6$, entsprechend $g \geq 2$) entspricht ein Graph, der aus zeichnerischen Gründen in drei Teile geteilt ist in:

- Teil a) mit den Gruppen $\mathbb{Z}_r, V_4, D_r, A_4, S_4, A_5$ ($r \leq 5$)
 Teil b) mit den Gruppen $\mathbb{Z}_2, V_4, \mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_{n-2}, D_{n-2}, D_n$ und ihren möglichen Beziehungen zu den Gruppen $D_r, \mathbb{Z}_r$ für $r \mid n$ oder $r \mid n-2$.
 Teil c) mit den möglichen Beziehungen zwischen Diedergruppen und zyklischen Gruppen verschiedener Ordnung, die dann zwangsläufig Teiler von n oder $n-2$ ist.

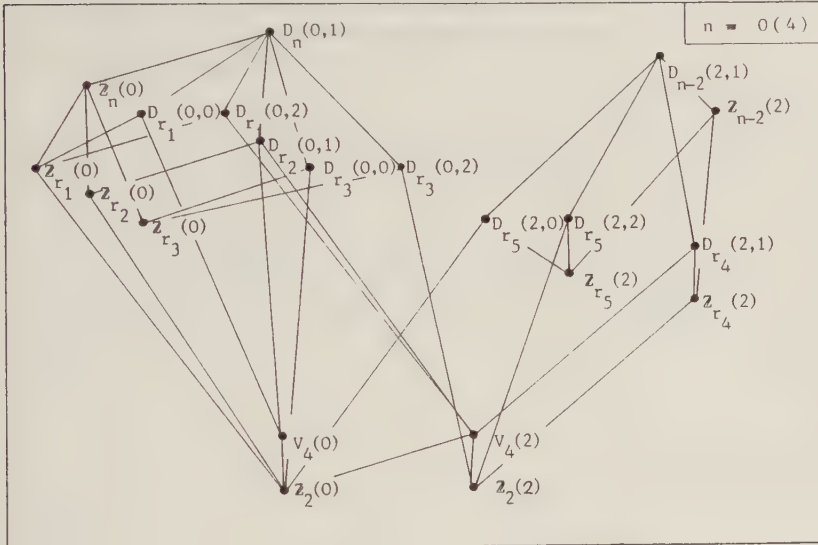
Beweis: Die Aussagen des Satzes sind nur Zusammenfassungen der Ergebnisse von 4.2. (In 4.2 werden Untergruppen von Permutationsgruppen bestimmt, hier werden die möglichen Erweiterungen gegebener Permutationsgruppen dargestellt, dies entspricht nur einem Wechsel der Betrachtungsweise.)

Teil a) in den Fällen $n \equiv 0(4)$



(Gestrichelt: Diese Permutationsgruppen treten nur auf, wenn n entsprechende Kongruenzbedingungen erfüllt, es ist $n \equiv i(5)$, $i = 0; 2$)

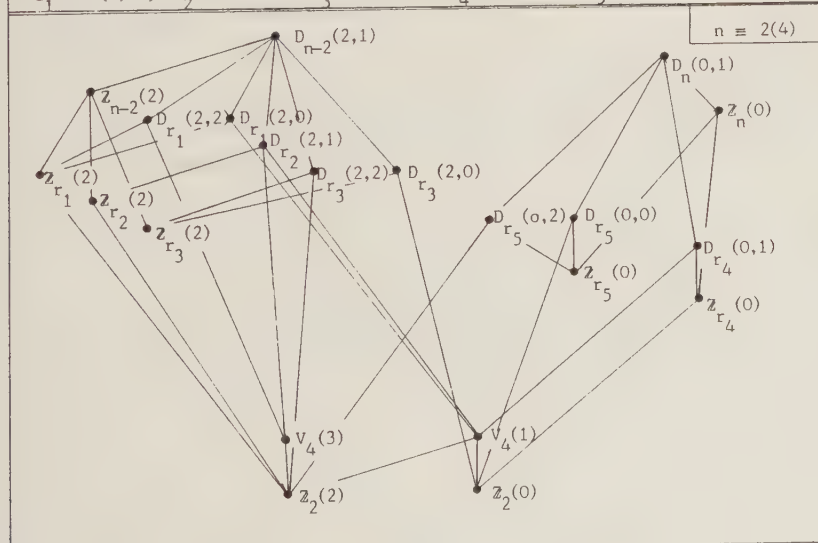
Teil b)



$$r_i s_i = n \quad \text{für } i=1,2,3 \quad ; \quad r_i s_i = n-2 \quad \text{für } i=4,5$$

$$r_1 \equiv 0(2) \quad , \quad r_2 \equiv 0(2) \quad , \quad r_3 \equiv 1(2) \quad , \quad r_4 \equiv 0(2) \quad , \quad r_5 \equiv 1(2)$$

$$s_1 \equiv 0(2) \quad , \quad s_2 \equiv 1(2) \quad , \quad s_3 \equiv 0(2) \quad , \quad s_4 \equiv 1(2) \quad , \quad s_5 \equiv 0(2)$$



$$r_i s_i = n-2 \quad \text{für } i=1,2,3 \quad \quad r_i s_i = n \quad \text{für } i=4,5$$

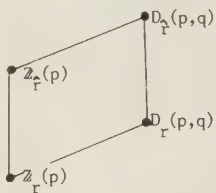
(Kongruenzen mod 2 wie oben im Fall $n \equiv 0(4)$)

Teil c)

Es sei $r \mid \hat{r} \mid n$ oder $r \mid \hat{r} \mid n-2$ ($r, r \geq 3$) und entsprechend $p = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \equiv 0(r) \\ 2 & \text{" } n \equiv 2(r) \end{cases}$

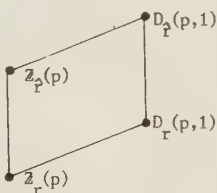
Folgende Fälle können auftreten:

für $q=0$ oder $q=2$:



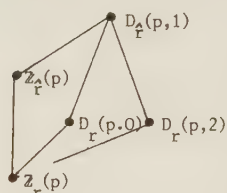
für $q=1$ und ungeraden

Index $\frac{\hat{r}}{r}$



für $q=1$ und geraden

Index $\frac{\hat{r}}{r}$



4.4 Die Mengen $I_n(G, \bar{G})$ und die Fasern der Abbildung $I_n(G) \longrightarrow M_k$

4.4.1 Eine explizite Beschreibung der Mengen $I_n(G, \bar{G})$

In Satz (4.2) wurde eine allgemeine Beschreibung der Mengen $I_n(G, \bar{G})$ binärer Formen gegeben, deren G -Aktion zu einer Aktion von $\bar{G}$ erweitert werden kann.

Die Untersuchung der $\mathcal{N}(\bar{g})$ -Konjugationsklassen aller Untergruppen von $\bar{g}$ und die Angabe der zugehörigen Normierungsabbildungen in den Tabellen von Abschnitt 4.2 ermöglicht es jetzt, diese Mengen explizit anzugeben. Dies geschieht mit Satz (4.7) und Tabelle (4.8).

Nach Satz (4.2) ist

$$I_n(G, \bar{G}) = \bigcup_{i=1}^p \mathcal{N}(g)^{\alpha_i} I_n(\bar{G})$$

wobei α_i die Normierungsabbildungen durchläuft, die zu g und $\bar{g}$ gehören.

Satz (4.7) liefert die Beschreibung der Mengen

$$\alpha_i I_n(\bar{G})$$

durch die Berechnung der Bilder der Grundformen von $\bar{g}$.

In (4.8) wird die Beschreibung der Mengen $I_n(G, \bar{G})$ tabellarisch zusammengefaßt.

Satz (4.7): G_i ($i=1,2,3$) bezeichne die zu $\bar{G}$ gehörenden Grundformen und α eine Normierungsabbildung zu den beiden Gruppen $g, \bar{g}$.

Dann erhält man $\alpha I_n(\bar{G})$, wenn man in

$$I_n(\pi_{\bar{G}}) = \bigcup_{\{\underline{v} | \underline{v} \text{ bestimmt von } \pi_{\bar{G}}\}} \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ G_1 & G_2 & G_3 \end{matrix} R_m^{\Delta} (G_1^{k_1}, G_2^{k_2})$$

die Grundformen G_i durch ihre Bilder αG_i ersetzt.

Diese sind im folgenden für alle Gruppen $G, \bar{G}$ und alle nichttrivialen Normierungsabbildungen tabelliert:

$$\delta: I_n(D_r) \longrightarrow I_n(\mathbb{Z}_2)$$

$$XY \longmapsto B_2 := X^2 - Y^2$$

$$\frac{1}{2}(X^2 + Y^2) \longmapsto B_r^+ := \frac{1}{2} \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} (1 + (-1)^i) X^i Y^{r-i}$$

$$\frac{1}{2}(X^2 - Y^2) \longmapsto B_r^- := \frac{1}{2} \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} (1 - (-1)^i) X^i Y^{r-i}$$

$$\text{Relation: } (B_r^+)^2 - (B_r^-)^2 = (-1)^r B_2^r$$

$$\alpha: I_n(S_4) \longrightarrow I_n(\mathbb{Z}_2)$$

$$O_6 \longmapsto S_6 := (X^2 - Y^2)(X^4 + 6X^2Y^2 + Y^4)$$

$$C_0 C_1 \longmapsto S_8 := (X^8 + Y^8) - \frac{28}{3} (X^6 Y^2 + X^2 Y^6) - \frac{14}{3} X^4 Y^4$$

$$\frac{1}{2}(C_0^3 + C_1^3) \longmapsto S_{12} := XY (X^2 + Y^2) [16X^2 Y^2 (X^2 + Y^2)^2 + 9(X^2 - Y^2)^4]$$

$$\text{Relation: } S_6^4 - S_8^3 = c S_{12}^2 \quad (c \in k^*)$$

$$\iota_1: I_n(A_5) \longrightarrow I_n(V_4) \subset I_n(\mathbb{Z}_2)$$

$$f \longmapsto f' := (X^{12} + Y^{12}) - 4,4\sqrt{5} (X^{10} Y^2 + X^2 Y^{10}) - 33 (X^8 X^4 + X^4 Y^8) + 8,8\sqrt{5} X^6 Y^6$$

$$H \longmapsto H' := 3(X^{20} + Y^{20}) + 38\sqrt{5} (X^{18} X^2 + X^2 Y^{18}) - 57 (X^{16} Y^4 + X^4 Y^{16}) + 456\sqrt{5} (X^{14} Y^6 + X^6 Y^{14}) - 1482 (X^{12} Y^8 + X^8 Y^{12}) - 988\sqrt{5} X^{10} Y^{10}$$

$$T \longmapsto T' := 225(X^{29} Y - X Y^{29}) + 580\sqrt{5} (X^{27} Y^3 - X^3 Y^{27}) + 15921(X^{25} Y^5 - X^5 Y^{25}) - 20880\sqrt{5} (X^{23} Y^7 - X^7 Y^{23}) + 90045(X^{21} Y^9 - X^9 Y^{21}) + 40020\sqrt{5} (X^{19} Y^{11} - X^{11} Y^{19}) + 570285 (X^{17} Y^{13} - X^{13} Y^{17})$$

$$\text{Relation: } 6,25\sqrt{5} (H'^3 - 27 f'^5) = T'^2$$

$$\alpha_8: I_n(S_4) \longrightarrow I_n(V_4)$$

$$O_6 \longmapsto S'_6 := \frac{1}{2} \xi XY (C_0 + C_1) = \xi XY (X^4 + Y^4)$$

$$C_0 C_1 \longmapsto S'_8 := \frac{1}{12} (7C_0^2 - 2C_0 C_1 + 7C_1^2) = X^8 - 14 X^4 Y^4 + Y^8$$

$$\frac{1}{2}(C_0^3 + C_1^3) \longmapsto S'_{12} := \frac{1}{12} (X^4 - Y^4) [11C_0 C_1 - 5(C_0^2 + C_1^2)] = X^{12} - Y^{12} - 33(X^4 Y^8 - X^8 Y^4)$$

$$\text{Relation: } S_6'^4 - S_8'^3 = c S_{12}'^2 \quad (c \in k^*)$$

zu Satz (4.7)

$$\tau: I_n(A_4) \longrightarrow I_n(D_3) \subset I_n(\mathbb{Z}_3)$$

$$\cup \\ I_n(S_4)$$

$$C_0 \longmapsto \hat{C}_0 := X^4 - 2\sqrt{2} iXY^3$$

$$C_1 \longmapsto \hat{C}_1 := 2\sqrt{2} iX^3Y - Y^4$$

$$O_6 \longmapsto \hat{O}_6 := X^6 + 5 i\sqrt{2} X^3Y^3 + Y^6$$

Relation: Für die Grundformen der Tetraedergruppe:

$$\hat{C}_0^3 - \hat{C}_1^3 = \hat{O}_6^2$$

Für die Grundformen der Oktaedergruppe:

$$(\hat{C}_0^3 + \hat{C}_1^3)^2 - \hat{O}_6^4 = c (\hat{C}_0 \hat{C}_1)^3 \quad (c \in k^*)$$

$$\iota_2: I_n(A_5) \longrightarrow I_n(D_3) \subset I_n(\mathbb{Z}_3)$$

$$f \longmapsto f'' := (X^{12} + Y^{12}) - 11\sqrt{5} i (X^3Y^9 + X^9Y^3) + 33 X^6Y^6$$

$$\begin{aligned} T \longmapsto T'' := & 8 (X^{30} - Y^{30}) + 580\sqrt{5} i (X^{27}Y^3 - X^3Y^{27}) \\ & - 3915 (X^{24}Y^6 - X^6Y^{24}) - 20010\sqrt{5} i (X^{21}Y^9 - X^9Y^{21}) \\ & - 190095 (X^{18}Y^{12} - X^{12}Y^{18}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H \longmapsto H'' := & 8 (X^{19}Y + XY^{19}) + 57\sqrt{5} i (X^{16}Y^4 + X^4Y^{16}) \\ & + 228 (X^{13}Y^7 + X^7Y^{13}) - 494\sqrt{5} i X^{10}Y^{10} \end{aligned}$$

$$\text{Relation: } T''^2 - 64 f''^5 = 25\sqrt{5} i H''^3$$

Ende von Satz (4.7)

Tabelle (4.8): Die Mengen $I_n(G, \bar{G})$ der binären Formen von $I_n(G)$ mit degenerierenden Symmetrie

Die Mengen $I_n(G, \bar{G})$ werden für alle Gruppen $G < \bar{G}$ mit folgenden Ausnahmen tabelliert:

- Erweiterungen zu zyklischen Gruppen und Diedergruppen wurden in den Abschnitten 1.3 und 2.7 beschrieben.
- Die Erweiterung von A_4 zu S_4 ist nur in einer Weise möglich und es gilt: $I_n(A_4, S_4) = I_n(S_4)$ (vgl. (3.21)).

Bemerkungen zu (4.8):

Die Wirkung der Normierungsabbildungen wurde in Satz (4.7) angegeben, die Wirkung des Normalisators $\mathcal{N}(q)$ wurde bei der Beschreibung der Invariantenräume $I_n(G)$ in 3.4.3.1 angegeben.

Auf eine Zerlegung der Mengen $I_n(G, \bar{G})$ nach den Isomorphietypen der Permutationsdarstellungen von G und $\bar{G}$ wurde verzichtet.

T a b e l l e (4.8)

$I_n(G, \bar{G})$	$\bar{G}$	z_c	D_c	A_4	S_4	A_5
z_2	$\frac{f_{\text{fall}} r = 0(2):}{I_n(2_c)}$ (vgl. 1.3)	a) $\frac{f_{\text{für}} r = 1(2):}{D_n^{\delta}(D_c)}$ b) $\frac{f_{\text{für}} r = 0(2):}{D_n(D_c) \cap D_n^{\delta}(D_c)}$ $= I_n(S_4)$	$D_n(D_c) \cup D_n^{\delta}(D_c)$ $\stackrel{\text{mit}}{=} I_n(S_4)$	$G_{m, I_n}(A_4)$	$G_{m, I_n}(S_4) \cap D_n(S_4)$	$G_{m, I_n}(A_5)$
v_4		$\frac{f_{\text{fall}} r = 0(2):}{\sum_{i=0}^2 \omega^i I_n(D_c)}$	$\sum_{i=0}^3 \omega^i I_n(D_c)$ $\sum_{i=0}^2 \omega^i I_n(D_c) = I_n(S_4)$ (vgl. 3.21)	$I_n(A_4)$	$I_n(S_4) \cap \bigcup_{i=0}^2 \omega^i I_n(S_4)$	$I_n(A_5) \cup I_n(A_5)^{x^{1,1}}$
z_3	$\frac{f_{\text{fall}} r = 0(3):}{I_n(2_c)} \text{ (vgl. 1.3)}$	$\frac{f_{\text{fall}} r = 0(3):}{G_{m, I_n}(D_c)} \text{ (vgl. 2.7)}$		$G_{m, I_n}(A_4)$	$G_{m, I_n}(S_4)$	$G_{m, I_n}(A_5)$
D_3		$\frac{f_{\text{fall}} r = 0(3):}{I_n(D_c)} \text{ (vgl. 2.7)}$			$I_n(S_4) \cap D_n^{\delta}(S_4)$ mit $a_2: x \mapsto -x$	$I_n(A_5) \cap D_n^{\delta}(A_5)$
z_4	$\frac{f_{\text{fall}} r = 0(4):}{I_n(2_c)} \text{ (vgl. 1.3)}$	$\frac{f_{\text{fall}} r = 0(4):}{G_{m, I_n}(D_c)} \text{ (vgl. 2.7)}$ $\frac{f_{\text{fall}} r = 0(4):}{I_n(D_c)} \text{ (vgl. 2.7)}$	$G_{m, I_n}(D_c) \text{ (vgl. 2.7)}$		$G_{m, I_n}(S_4)$	
D_4		$\frac{f_{\text{fall}} r = 0(4):}{I_n(D_c)} \text{ (vgl. 2.7)}$			$a_9 I_n(S_4) \cap I_n(S_4)$	
z_5	$\frac{f_{\text{fall}} r = 0(5):}{I_n(2_c)} \text{ (vgl. 1.3)}$	$\frac{f_{\text{fall}} r = 0(5):}{G_{m, I_n}(D_c)} \text{ (vgl. 2.7)}$				$G_{m, I_n}(A_5)$
D_5		$\frac{f_{\text{fall}} r = 0(5):}{I_n(D_c)}$				$I_n(A_5) \cap D_n^{\delta}(A_5)$ mit $a_2: x \mapsto -x$

Beweis von (4.7):

1) Wirkung von δ auf die Grundformen von $\mathcal{D}_r$:

B_r^+, B_r^- ergeben sich direkt durch Substitution und geeignete Normierung. (Bemerkung B_r^+ und B_r^- erhält man, wenn man die Summendarstellung von $(X+Y)^r$ nach einem "Reißverschlußverfahren" zerlegt.

Beispiel: $r=4$:

$$\begin{aligned} B_4^+ &= X^4 + 6X^2Y^2 + Y^4 \\ B_4^- &= 4X^3Y + 4XY^3 \end{aligned} \quad)$$

Die Relation ergibt sich aus der Beobachtung von

$$B_r^+ + B_r^- = (X+Y)^r \quad \text{und} \quad B_r^+ - B_r^- = [- (X-Y)]^r,$$

daraus ergibt sich

$$B_r^{+2} - B_r^{-2} = (-1)^r [(X+Y)(X-Y)]^r = (-1)^r B_2^r$$

2. Wirkung von $\circ$ auf die Grundformen von $\mathcal{Y}_4$:

Durch Einsetzen erhält man

$$\circ O_6 = \xi(X^2 - Y^2)(X^4 + 6X^2Y^2 + Y^4)$$

Zur Berechnung des Bildes der beiden anderen Grundformen geht man von C_0 und C_1 aus:

$$\begin{aligned} \circ C_0 &= -8 XY(X^2 + Y^2) + 2\sqrt{3}(X^2 - Y^2)^2 \\ \circ C_1 &= -8 XY(X^2 + Y^2) - 2\sqrt{3}(X^2 - Y^2)^2 \end{aligned}$$

Dies ergibt:

$$\circ(C_0 C_1) = c \left[(X^8 + Y^8) - \frac{28}{3}(X^6 Y^2 + X^2 Y^6) - \frac{14}{3} X^4 Y^4 \right] \quad (c \in k^\times)$$

Ferner erhält man mit der dritten Einheitswurzel $\rho = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\circ(C_0 + \rho C_1) = [-4XY(X^2 + Y^2) + 3\sqrt{3}(X^2 - Y^2)^2] + i\sqrt{3}[-4XY(X^2 + Y^2) - \sqrt{3}(X^2 - Y^2)^2],$$

$$\circ(C_0 + \rho^2 C_1) = [-4XY(X^2 + Y^2) + 3\sqrt{3}(X^2 - Y^2)^2] - i\sqrt{3}[-4XY(X^2 + Y^2) - \sqrt{3}(X^2 - Y^2)^2],$$

$$\circ(C_0 + C_1) = -16XY(X^2 + Y^2).$$

Daraus ergibt sich durch Multiplikation die Behauptung für

$$\circ(C_0^3 + C_1^3).$$

Die Relation für S_6, S_8, S_{12} ergibt sich durch die Beobachtung, daß $S_6^4 - S_8^3$ nur vom Grad 23 in X ist.

3. Die Wirkung von α_8 auf die Grundformen von $\mathcal{Y}_4$:

Die Behauptung ergibt sich direkt durch einfache Rechnung.

4. Die Wirkung von τ auf die Grundformen von $\mathcal{A}_4$

ergibt sich ebenfalls durch direkte, etwas mühsame Rechnung, die Relation erhält man unter Beachtung der höchsten Grade in X und Y .

5. Die Wirkung von ι_1 auf die Grundformen von $\mathcal{A}_5$

Es soll zunächst $\iota_1 f$ berechnet werden:

Die Nullstellen von f sind die Ikosaedereckpunkte (vgl. 3.2.1.5), sie bilden eine Bahn jeder Tetraedergruppe von $\mathcal{A}_5$. Dann bilden die Nullstellen von $\iota_1 f$ eine Bahn der normierten Gruppe $\mathcal{A}_4$ und weil $0 \in \mathbb{P}_1$ ein Ikosaedereckpunkt ist, gehört $\iota_1 0$ zu dieser Bahn.

Nach 3.4.3.1 (Tabelle) gilt also

$$f = c (C_0^3 - m^3 C_1^3) = c \prod_{i=0}^2 (C_0 - m \rho^i C_1)$$

(mit $c, m \in k^\times$ und einer primitiven Einheitswurzel ρ)

O.E. bezeichne $(C_0 - m C_1)$ den $\mathcal{V}_4$ -invarianten Faktor, der die Nullstelle

$$\iota_1 0 = \sqrt{\frac{1+2i}{\sqrt{5}}}$$

besitzt. Es ist $(\iota_1 0)^2 + (\iota_1 0)^{-2} = 2 \cdot 5^{-0,5}$ und somit stimmt

$$X^4 - (\iota_1 0)^2 + (\iota_1 0)^{-2} X^2 Y^2 + Y^4 = X^4 - \frac{2}{\sqrt{5}} X^2 Y^2 + Y^4 \quad (1)$$

bis auf einen Homogenitätsfaktor mit $C_0 - m C_1$ überein. Vergleicht man

$$C_0 - m C_1 = (1-m) [X^4 - 2i\sqrt{3} \frac{1+m}{1-m} X^2 Y^2 + Y^4]$$

mit (1), so erhält man

$$2i\sqrt{3} \frac{1+m}{1-m} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

und daraus

$$m^3 = - (7 + 33i\sqrt{15}) 2^{-7}$$

Dies liefert den gesuchten Ausdruck für $f' = \iota_1 f$.

(Bemerkung: Der Tausch des Vorzeichens von $\sqrt{5}$ entspricht der Operation von $\chi \in \mathcal{N}(\mathcal{V}_4)$ auf $I_n(\mathcal{V}_4)$.)

Wie bei Klein ([K], S. 56) berechnet man jetzt die Bilder von H und T mit Hilfe der Hesse'schen Form.

6. Die Wirkung von ι_2 auf die Grundformen von $\mathcal{A}_5$

Die Normierungsabbildung ι_2 wurde in der Tabelle 4.2.6 definiert aber nicht berechnet, weil die gesuchten Bilder der Grundformen f, T, H in anderer Weise leichter zu berechnen sind. ι_2 ist definitionsgemäß ein Element von $\text{PGL}_2(k)$ mit der Eigenschaft $\iota_2 D_3 = D_3$ (mit $D_3 \in \mathcal{A}_5$). Man betrachte zunächst die Normierungsabbildung τ_{11} der zyklischen

Gruppen Z_3 von A_5 . Nach den bisherigen Ergebnissen ist

$${}^{11}f = c_0^3 + 2^{-7}(7 + 33i\sqrt{15}) c_1^3$$

(vgl. Teil 5 des Beweises)

also $\hat{f} := {}^{\tau 11}f = \hat{c}_0^3 + 2^{-7}(7 + 33i\sqrt{15}) \hat{c}_1^3$

($\hat{c}_0, \hat{c}_1$ wie in Satz (4.7).)

$\hat{f}$ muß in $I_n(Z_3)$ liegen. Weil jede zyklische Gruppe Z_3 von A_5 in einer Diedergruppe D_3 von A_5 liegt, muß es möglich sein, durch eine "Drehung" $\alpha \in G_m$ sogar

$$\alpha f \in I_n(D_3) \subset I_n(Z_3)$$

zu erreichen. Dies bedeutet dann insbesondere, daß $\iota_2 := \alpha \tau \iota_1$ eine Normierungsabbildung für die Diedergruppen D_3 von A_5 ist.

Es gilt

$$\begin{aligned} \hat{c}_0^3 &= X^{12} - 6\sqrt{2} i X^9 Y^3 - 24X^6 Y^6 + 16\sqrt{2} i X^3 Y^9 \\ \hat{c}_1^3 &= -16\sqrt{2} i X^9 Y^3 + 24X^6 Y^6 + 6\sqrt{2} i X^3 Y^9 - Y^{12} \end{aligned}$$

also mit $k=2^{-7}(7+33\sqrt{15}i)$

$$\hat{c}_0^3 + k \hat{c}_1^3 = X^{12} - 2\sqrt{2}i(3+8k)X^9Y^3 - 24(1-k)X^6Y^6 + 2\sqrt{2}i(8+3k)X^3Y^9 - kY^{12}$$

Für $\alpha: x \mapsto \lambda x$ ($\lambda \in k^\times$) gilt

$$\alpha f = \alpha(\hat{c}_0^3 + k \hat{c}_1^3) = X^{12} - 2\sqrt{2}i(3+8k)\lambda^3 X^9 Y^3 - 24(1-k)\lambda^6 X^6 Y^6 + 2\sqrt{2}i(8+3k)\lambda^9 X^3 Y^9 - k\lambda^{12} Y^{12};$$

Da f als Nullstellenmenge die Menge der Ikosaedereckpunkte besitzt, kann f keine Ausnahmebahnen einer Diedergruppe D_3 von A_5 enthalten.

Dies gilt dann ebenso für ${}^{12}f = \alpha \tau {}^{11}f$, so daß die Bedingung

$${}^{12}f \in I_{12}(D_3)$$

gemäß Definition (2.7) und Satz (2.11) die Symmetrie der Koeffizienten gegen die Vertauschung von X und Y bedeutet.

Dies liefert Bedingungen für λ^6 und λ^{12} , aus denen sich

$$\lambda^6 = 2^{-4}(11+3\sqrt{15}i)$$

ergibt. Man erhält

$$\lambda^3 = \pm \frac{\sqrt{10}}{40} (5-3\sqrt{15}i)$$

und daraus durch Einsetzen in die Gleichung für αf :

$$f'' := \alpha f = \alpha \tau {}^{11}f = (X^{12} + Y^{12}) - 11\sqrt{5}i(X^9Y^3 + X^3Y^9) + 33X^6Y^6.$$

(Bemerkung: Die Wahl des Vorzeichens von λ^3 entspricht der Operation von $\mathcal{N}(D_3)$ auf $I_{12}(D_3)$. O.E. wurde das positive Vorzeichen gewählt.) H'' und T'' erhält man wieder durch Berechnung der Hesse'schen von f'' und der Funktionaldeterminante von f'' und H'' .

Damit sind die Ergebnisse von Satz(4.7) gezeigt.

Beweis von (4.8):

Die Angaben der Tabelle sind im wesentlichen direkte Konsequenzen aus Satz (4.2) unter Berücksichtigung der Ergebnisse aus Abschnitt 4.2. für die speziellen Gruppen. Zu bemerken ist nur noch:

- a) Bei den Gruppen $G=\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_5$ braucht nicht die Operation des vollen Normalisators D berücksichtigt werden, wenn die Gruppe $\alpha_{\bar{G}}$ bereits die Involution $(x \mapsto x^{-1}) \in D$ enthält, das Bild $\alpha_{I_n}(\bar{G})$ also invariant unter dieser Involution ist. Aus dem gleichen Grund braucht auch $\chi \in \mathcal{N}(D_4)$ nicht berücksichtigt zu werden.
- b) Die Disjunktheit der Bilder verschiedener Normierungsabbildungen in den Fällen $\bar{G}=D_r, S_4, A_5$ ergibt sich, weil Elemente aus dem Durchschnitt jeweils mehrere verschiedene Gruppen S_4, A_5 bzw. Diedergruppen D_r mit verschiedenen "Achsen" enthalten müßten.
- c) Die Aussagen über die Durchschnitte der Bilder verschiedener Normierungsabbildungen im Fall $\bar{G}=S_4$ erhält man im Fall $G=V_4$ folgendermaßen:
Ein Element aus dem Durchschnitt enthält mehrere Gruppen D_4 mit "orthogonalen Achsen", es läßt also eine Oktaedergruppe S_4 zu. Umgekehrt läßt jedes Element von $I_n(S_4)$ die drei Gruppen $\omega^i_{D_4}$ zu.
Im Fall $G=\mathbb{Z}_2$ argumentiert man entsprechend.

Durch den Vergleich der Dimensionen der Mengen $I_n(\pi_G)$ und $I_n(\pi_G, \pi_{\overline{G}})$ erhält man noch folgendes Lemma:

Lemma (4.9): - Die Mengen $I_n(\pi_G)$ enthalten eine nichtleere Menge deren binäre Formen keine Erweiterung der G-Aktion zulassen.

Ausnahmen sind nur folgende Fälle:

Alle binären Formen aus $I_n(\pi_G)$ mit

$$\pi_G = \mathbb{Z}_{\tilde{n}/2}(p), \mathbb{Z}_{\tilde{n}}(p), D_{\tilde{n}/2}(p, 2) \quad (\tilde{n} = n-p, p \in \{0; 2\})$$

sowie

$$\pi_G = \mathbb{Z}_2(2), V_4(3), \mathbb{Z}_4(2), D_4(2, 1) \quad (n=6 \text{ bzw. } g=2)$$

erlauben eine Erweiterung der G-Aktion zur Aktion von

$$D_{\tilde{n}/2}(p, 0), D_{\tilde{n}}(p, 1), D_{\tilde{n}}(p, 1)$$

bzw.

$$V_4(1), S_4, S_4, S_4.$$

- Die Mengen $M(\pi_G)$ sind mit Ausnahme der genannten Fälle nicht leer.

Auf den trivialen aber umfangreichen Beweis des Lemmas wird verzichtet.

Zu zeigen ist nur, daß in allen außer den genannten Ausnahmefällen die Dimension von $I_n(\pi_G, \pi_{\overline{G}})$ kleiner ist als die Dimension von $I_n(\pi_G)$. Erstere ist gleich der Dimension von $I_n(\pi_{\overline{G}})$, im Fall von $G=\mathbb{Z}_r$ erhöht um die Dimension des Torus G_m .

Die Umkehrung, der Beweis, daß in den genannten Ausnahmefällen die Erweiterung der G-Aktion möglich ist, ist trivial.

4.4.2 Die Fasern der Abbildung $I_n(\pi_G)/\mathcal{N}(q) \longrightarrow M_k$

In Abschnitt 4.3 wurden die Mengen $\overline{M(\pi_G)}$ der Modulpunkte von hyperelliptischen Kurven mit G -Aktion vom Isomorphietyp π_G als Bilder der Invariantenräume $I_n(\pi_G)$ eingeführt.

Weil $\mathcal{N}(q)$ auf $I_n(\pi_G)$ operiert und binäre Formen identifiziert, die zu isomorphen Kurven gehören, kann man zum Quotienten nach $\mathcal{N}(q)$ übergehen:

$$I_n(\pi_G)/\mathcal{N}(q) \longrightarrow \overline{M(\pi_G)}$$

Es bleibt die Frage, inwieweit $\overline{M(\pi_G)}$ dadurch eindeutig parametrisiert wird. Diese wird durch den Zusatz zu (3.17) im wesentlichen beantwortet.

Er besagt zunächst, daß die $\mathcal{N}(q)$ -Bahnen binärer Formen in $I_n(\pi_G)$, die keine Erweiterung der G -Aktion zulassen, in einer bijektiven Beziehung zu den Mengen $M(\pi_G)$ der Modulpunkte hyperelliptischer Kurven mit reduzierter Automorphismengruppe $A \approx G$ stehen.

Die Fasern der obigen Abbildung sind also über $M(\pi_G)$ einpunktig. Mehrpunktige Fasern in $I_n(\pi_G)/\mathcal{N}(q)$ (entsprechend mehreren $\mathcal{N}(q)$ -Bahnen zu einer Isomorphieklasse hyperelliptischer Kurven) treten nur auf, wenn die reduzierte Automorphismengruppe A des Modulpunkts mehrere nichtkonjugierte Untergruppen der Isomorphieklasse von G besitzt, sie liegen in der Menge $I_n(\pi_G, \pi_{\overline{G}})$.

Satz (4.10): Es seien π_G und $\pi_{\overline{G}}$ Isomorphietypen linearer Permutationsgruppen, und $\pi_{\overline{G}}$ eine Erweiterung von π_G .

Die Mächtigkeit der Fasern von

$$I_n(\pi_G)/\mathcal{N}(q) \longrightarrow \overline{M(\pi_G)}$$

über Punkten von $M(\pi_{\overline{G}})$ ist gleich der Anzahl der Konjugationsklassen von Permutations-Untergruppen vom Typ π_G in einer Permutationsgruppe vom Typ $\pi_{\overline{G}}$.

Beweis: Ergibt sich direkt aus dem Beweis des Zusatzes zu (3.17).

Wähle o.E. $F \in I_n(\pi_{\overline{G}})$. Ist ${}^\alpha g' = g$ für eine Untergruppe

$$g' < \overline{g},$$

so gilt ${}^\alpha F \in I_n(\pi_G)$ genau dann, wenn g' auf den Nullstellen von F eine Permutationsdarstellung vom Typ π_G besitzt.

Dies liefert die notwendige Präzisierung des Zusatzes von (3.17).

Mehrpunktige Fasern treten nur in wenigen Fällen auf, diese erhält man aus den Untergruppendiagrammen des Abschnitts 4.2. Sie sind im folgenden zusammengefaßt:

Tabelle (4.11) : Mächtigkeit der Fasern der Abbildung				
$I_n(\pi_G)/\mathcal{N}(Q) \longrightarrow M_k$ über Punkten von $M(\pi_{\bar{G}})$				
Die Mächtigkeit der Faser ist genau in folgenden Fällen größer als 1:				
G	$\bar{G}$	π_G	$\pi_{\bar{G}}$	Faser
Z_2	V_4	$Z_2(0)$	$V_4(0)$	3
			$V_4(1)$	2
		$Z_2(2)$	$V_4(2)$	2
			$V_4(3)$	3
	D_r $r \equiv 0(2)$	$Z_2(0)$	$D_r(0,0)$	3
			$D_r(2,0)$	2
			$D_r(0,1)$	2
		$Z_2(2)$	$D_r(0,2)$	2
			$D_r(2,1)$	2
			$D_r(2,2)$	3
	S_4	$Z_2(0)$	$n \equiv 0; 8 \pmod{24}$	2
		$Z_2(2)$	$n \equiv 2; 18 \pmod{24}$	2
V_4	S_4	$V_4(0)$	$n \equiv 0; 8 \pmod{24}$	2
		$V_4(3)$	$n \equiv 2; 18 \pmod{24}$	2
D_r oder V_4	$D_{\bar{r}}^1$	$D_r(p,q)$ oder $V_4(\frac{p+q}{2})$	$D_{\bar{r}}(p,q)$ $q \in \{0;2\}$	2

¹⁾ Für einen geraden Index von D_r bzw. V_4 in $D_{\bar{r}}$.

Bemerkung: In diesen Fällen folgt aus der Normalität von $I_n(\pi_G)/\mathcal{N}(Q)$ mit Zariskis Hauptsatz, daß $\overline{M(\pi_G)}$ in den Punkten von $M(\pi_{\bar{G}})$ nicht normal sein kann. Weitergehende Ergebnisse liefert aber Satz (7.5).

Teil 2 - Lokale Untersuchung der Modulmannigfaltigkeit

In Teil 1 wurde untersucht, welche Automorphismengruppen hyperelliptischer Kurven auftreten, die Mengen $I_n(\pi_G)/\mathcal{N}(q)$ lieferten Modulräume der Kurven mit G-Aktion eines gegebenen Isomorphietyps.

Kapitel 4 lieferte mit der Untersuchung der möglichen Erweiterungen von G-Aktionen eine Beschreibung der Zusammenhänge zwischen den Bildern $\overline{M(\pi_G)}$ dieser Modulräume in der Modulmannigfaltigkeit.

Die folgenden Kapitel sollen der lokalen Untersuchung der Modulmannigfaltigkeit und der Beschreibung dieser Mengen $\overline{M(\pi_G)}$ dienen.

Die Abbildung
$$I_n(\pi_G)/\mathcal{N}(q) \longrightarrow M_k$$
 eignet sich für diese Zwecke wenig, weil einerseits die Struktur der Mengen $I_n(\pi_G)/\mathcal{N}(q)$ bereits, wie aus den Kapiteln 1 und 2 ersichtlich ist, recht kompliziert ist, und weil andererseits durch die Einschränkung auf Kurven mit G-Aktion die Möglichkeit verloren geht, die Umgebung der Modulpunkte von Kurven mit G-Aktion auf der Modulmannigfaltigkeit mit zu betrachten.

Aus diesem Grund wird im folgenden die Quotientenabbildung des Raums binärer Formen nach der Operation von $\mathrm{PGL}_2(k)$ lokal untersucht.

5. Tangential- und Normalenraum zur $PGL_2(k)$ -Bahn von $f \in R_n^\Delta$

V bezeichne im folgenden den affinen Raum der binären Formen vom Grad n in X,Y (einschließlich der Nullform). R_n bezeichne wie bisher den zugehörigen projektiven Raum und

$$p: V \setminus \{0\} \longrightarrow R_n$$

die natürliche Quotientenabbildung. Im Unterschied zur übrigen Arbeit wird hier zwischen $f \in V \setminus \{0\}$ und dem Bild $[f] := p(f) \in R_n$ unterschieden.

Für die projektive lineare Gruppe wird kurz $\Gamma := PGL_2(k)$ geschrieben. Die Isotropiegruppe einer binären Form $f \in R_n^\Delta$ bezüglich der Operation von Γ stimmt mit der Automorphismengruppe der zugehörigen Kurve überein. Sie wird mit Γ_f bezeichnet.

5.1 Konstruktion einer Γ_f -stabilen, affinen Umgebung von $f \in R_n^\Delta$

Weil k als algebraisch abgeschlossen vorausgesetzt wird, ist $\Gamma = PSL_2(k)$, also Quotient von $SL_2(k)$ nach dem zentralen Normalteiler $\{\pm 1\}$. Die Operation von Γ auf R_n wird von einer analogen Aktion von $SL_2(k)$ auf V induziert.

Es sei jetzt $[f] \in R_n^\Delta$, $\hat{\Gamma}_f$ das Urbild von Γ_f in $SL_2(k)$, also die binäre Polyedergruppe zu Γ_f . $\langle f \rangle \subset V$ ist Eigenraum von $\hat{\Gamma}_f$, und weil $\hat{\Gamma}_f$ endlich ist existiert ein zu $\langle f \rangle$ bzgl. $\hat{\Gamma}_f$ komplementärer Raum L_0 (vgl. z.B. [S1], I-5):

$$V = \langle f \rangle \oplus L_0$$

$$L_0 = \langle f_1, \dots, f_n \rangle, \quad (f_i \in V, \text{ linear unabhängig})$$

l_f bezeichne die zu f duale Linearform, die durch

$$l_f(f) = 1 \text{ und } l_f \Big|_{L_0} = 0$$

charakterisiert ist.

Durch $l_f \neq 0$ wird in R_n eine affine Umgebung $R_{n,f}$ festgelegt, die in üblicher Weise mit

$$L_1 := \{g \in V \mid l_f(g) = 1\} = f + L_0$$

identifiziert werden kann. L_0 kann ferner als Tangentialraum von L_1 aufgefaßt werden.

(5.1) Bemerkung: Die (lineare) Operation von $\hat{\Gamma}_f$ auf $R_{n,f}$ stimmt bis auf den zu f gehörigen Charakter von $\hat{\Gamma}_f$ mit der Operation von $\hat{\Gamma}_f$ auf L_0 überein.

Beweis: Weil f Semiinvariante von $\hat{\Gamma}_f$ ist, induziert f einen Charakter χ_f von $\hat{\Gamma}_f$:

$$\gamma_f = \chi_f(\gamma) \cdot f \quad \text{für } \gamma \in \hat{\Gamma}_f$$

Für $g \in R_{n,f}$ gilt:

$$[\gamma g] = [\gamma f + \sum_i u_i \gamma_{f_i}] = [f + \sum_i \frac{u_i}{\chi_f(\gamma)} \gamma_{f_i}]$$

$$(\gamma \in \hat{\Gamma}_f, f_i \in L_0)$$

5.2. Tangential-und Normalenraum an die Γ -Bahn von f

Im folgenden wird das Differential der Orbitabbildung

$$\begin{aligned} o_f : \Gamma &\longrightarrow R_n \\ \gamma &\longmapsto \gamma[f] \end{aligned}$$

benötigt. Es genügt, zunächst die Orbitabbildung $\hat{o}_f$

$$\begin{aligned} \hat{o}_f : SL_2(k) &\longrightarrow V \\ \gamma &\longmapsto \gamma_f \end{aligned}$$

zu betrachten und anschließend zu Γ und R_n überzugehen:

$$\begin{array}{ccc} SL_2(k) & \xrightarrow{\hat{o}_f} & V \\ \downarrow p_0 & & \downarrow p \\ \Gamma & \xrightarrow{o_f} & R_n \end{array}$$

Das Differential $dp: V \longrightarrow L_0 \simeq T_f(R_n)$ ist die Projektion von V auf L_0 mit Kern $\langle f \rangle$.

Wegen der Linearität der $SL_2(k)$ -Operation auf V kann man die Berechnung von $d_1 \hat{o}_f$ zunächst für Monome f durchführen

($d_1 \hat{o}_f$ bezeichne das Differential an der Stelle $1 \in SL_2(k)$.)

Man erhält z.B. für $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}_2(k)$ und $f = X^i Y^{n-i}$

$$d_1 \hat{o}_f \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = -iX^{i-1}Y^{n-i+1} = -\frac{\partial f}{\partial X} Y$$

Es ergibt sich allgemein

$$d_1 \hat{o}_f \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{\partial f}{\partial X} Y, \quad d_1 \hat{o}_f \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{\partial f}{\partial Y} X, \quad d_1 \hat{o}_f \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial Y} Y - \frac{\partial f}{\partial X} X$$

(Das Minuszeichen tritt auf, weil die Operation auf dem Formenraum durch die Substitution mit der inversen Abbildung definiert ist.)

Man erhält drei Tangentialvektoren, zunächst an die Bahn von $SL_2(k)$ in V , durch die Projektion dp an die Bahn von Γ in R_n^Δ . Folgende Überlegungen zeigen, daß diese den Tangentialraum der Bahn

$T_f(\Gamma f)$ aufspannen müssen:

Die Bahn Γf in R_n^Δ ist dreidimensional und abgeschlossen ([G], S.62, [N], S.110). Der Tangentialraum der (glatten) Bahn ist daher ebenfalls dreidimensional. Ferner ist das Differential $d_1 o_f$ surjektiv ([K], S.76). Daraus ergibt sich, daß $T_f(\Gamma f)$ von den Projektionen

$$\begin{aligned} e_1 &:= -\frac{\partial f}{\partial X} Y - 1_f \left(-\frac{\partial f}{\partial X} Y \right) \cdot f \\ e_2 &:= -\frac{\partial f}{\partial Y} X - 1_f \left(-\frac{\partial f}{\partial Y} X \right) \cdot f \\ e_3 &:= \left(\frac{\partial f}{\partial Y} Y - \frac{\partial f}{\partial X} X \right) - 1_f \left(\frac{\partial f}{\partial Y} Y - \frac{\partial f}{\partial X} X \right) \cdot f \end{aligned}$$

aufgespannt wird:

Satz (5.2): Der Tangentialraum $T_f(\Gamma f)$ an die Bahn Γf von $f \in R_n$ wird von $e_1, e_2, e_3 \in L_0$ aufgespannt.

Definition (5.3): Ist N' ein Γ_f -stabiles Komplement von $T_f(\Gamma f)$ in L_0 , so wird

$$N := f + N' \subset R_{n,f}$$

als Normalenraum zur Bahn Γf in f bezeichnet.

5.3 Die irreduziblen Darstellungen von Γ_f auf dem Normalenraum

Die Operation von Γ_f auf $R_{n,f}$ ist linear, wenn man $R_{n,f}$ als affinen Raum mit Ursprung in f auffaßt (vgl. Bemerkung (5.1)). Daher ist es möglich, die Darstellungen von Γ_f auf $R_{n,f}$ und $N \subset R_{n,f}$ durch die Anzahlen der irreduziblen Komponenten zu charakterisieren. Dies soll zunächst für zyklische Isotropiegruppen geschehen.

5.3.1 Die Operation zyklischer Untergruppen von Γ_f auf $R_{n,f}$ und N

Ist $\alpha \in \Gamma_f$, so permutiert α die Nullstellen von f . Dabei können nach den Überlegungen von Kapitel 1 nur 0;1 oder 2 Fixpunkte auftreten und die zugehörige Permutationsdarstellung von $\langle \alpha \rangle$ wird nach Definition (1.1) mit $Z_r(0), Z_r(1), Z_r(2)$ bezeichnet (mit $r = \text{ord } \alpha$).

Satz (5.4): Es sei $\alpha \in \Gamma_f$ und $\text{ord } \alpha = r$. Dann gilt

- a) α hat auf $T_f(\Gamma_f)$ die Eigenwerte
 $1, \xi, \xi^{-1}$ (wobei ξ eine primitive r -te Einheitswurzel ist)
 bzw.
 $1, -1, -1$ (im Fall $r=2$)
- b) Die Vielfachheiten der Eigenwerte von α auf $T_f(R_{n,f})$
 $\simeq R_{n,f}$ ergeben sich aus folgender Tabelle

Permutationsdarstellung Eigenwerte $r > 2$	$Z_r(0)$ $s = n : r$	$Z_r(1)$ $s = (n-1) : r$	$Z_r(2)$ $s = (n-2) : r$
1	s	s	s
ξ	s	s	s+1
ξ^i ($i=2, \dots, r-2$)	s	s	s
ξ^{-1}	s	s+1	s+1
(ξ bezeichnet eine primitive r-te Einheitswurzel)			
Permutationsdarstellung Eigenwerte $r=2$	$Z_2(0)$ $s = n : 2$		$Z_2(2)$ $s = (n-2) : 2$
1	s		s
-1	s		s+2

Beweis: i) Durch eine "Verschiebung" längs der Bahn von f erreicht man (vgl. 1.1 und 3.4.3.1)

$$f = X^a Y^b \prod_{i=1}^s (X^r - \lambda_i Y^r) \quad \text{mit } s = (n-a-b) : r \text{ und}$$

mit $\lambda_i \in k^*$, paarweise verschieden,
 $r \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$,

$$(a,b) = \begin{cases} (0,0) & \text{für } z_r(0) \\ (1,0) & \text{" } z_r(1) \\ (1,1) & \text{" } z_r(2) \end{cases},$$

sowie $\alpha: x \longrightarrow \xi x$ mit einer primitiven r -ten
 Einheitswurzel ξ .

ii) Als Basis von V werde gewählt

$$\{f\} \cup \{X^i Y^{n-i}\}_{i=0, \dots, n, i \neq rs+a}$$

Weil f das Monom $X^{rs+a} Y^b$ enthält, bilden die Monome
 $X^i Y^{n-i}$ ($i \neq rs+a$) eine zu f bzgl. $\langle \alpha \rangle$ komplementäre Basis.
 (Dies muß nicht für Γ_f gelten, was aber hier nicht nötig
 ist, weil die Operation von $\langle \alpha \rangle$ auf V und auf jedem Kom-
 plement zu $\langle f \rangle$ wohlbestimmt ist.)

Wenn man α durch

$$\begin{pmatrix} \rho^{-1} & \\ & \rho \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(k)$$

mit einer primitiven $2r$ -ten Einheitswurzel ρ reprä-
 sentiert, so ergibt sich

$$\alpha f = (-1)^s (\rho^{a-b}) f \text{ und } \alpha(X^i Y^{n-i}) = \rho^{2i-n} X^i Y^{n-i}.$$

Der Eigenwert zu $X^i Y^{n-i}$ in $R_{n,f}$ bzw. L_o ist also

$$\frac{\rho^{2i-n}}{(-1)^s \rho^{a-b}} = \frac{\rho^{2i-rs-a-b}}{(-1)^s \rho^{a-b}} = \xi^{i-a}$$

mit $\xi = \rho^2$, ξ ist also primitive r -te Einheitswurzel.
 Abzählen der Basiselemente $X^i Y^{n-i}$ ($i=0, \dots, n$; $i \neq rs+a$)
 liefert den Teil b) des Satzes.

iii) Die Eigenwerte auf $T_f(\Gamma_f)$ erhält man folgendermaßen:

l_f bezeichne die Linearform mit $l_f(f) = 1$, die die
 Basis aus ii) annulliert, $R_{n,f}$ die zugehörige Umgebung
 von f in R_n .

Dann gelten die Überlegungen von 5.2 entsprechend,
 allerdings ist $R_{n,f}$ nicht notwendigerweise stabil un-
 ter der vollen Isotropiegruppe von f .

Es gilt

$$e_1 = -\frac{\partial f}{\partial X} Y - l_f(-\frac{\partial f}{\partial X} Y) f = -\frac{\partial f}{\partial X} Y$$

weil f nur Monome vom Grad $kr+a$ ($k=0,1,\dots,s$) in X enthält, während die Monome von $\frac{\partial f}{\partial X} Y$ die Grade $kr+a-1$ haben. Ebenso gilt

$$e_2 = - \frac{\partial f}{\partial Y} X$$

e_3 enthält wie f Monome vom Grad $kr+a$ ($k=0,1,\dots,s$).

Für solche Monome vom Grad $i=kr+a+c$ ($c \in \{0,1,-1\}$) gilt aufgrund der Ergebnisse von ii)

$$\alpha(X^i Y^{n-i}) = (-1)^s \rho^{a-b+2c} X^i Y^{n-i}$$

Also gilt

$$\begin{aligned} \alpha[f + X^i Y^{n-i}] &= [(-1)^s \rho^{a-b} f + (-1)^s \rho^{a-b+2c} X^i Y^{n-i}] \\ &= [f + \xi^c X^i Y^{n-i}] \quad (\xi = \rho^2). \end{aligned}$$

Mit $c = \pm 1$; 0 ergeben sich, wie behauptet, die Eigenwerte 1, ξ , ξ^{-1} . Dies zeigt den Teil b) des Satzes.

(Offensichtlich trifft die Behauptung auch im Fall $r=2$ zu.)

Folgerung (5.5): Für die Vielfachheiten der Eigenwerte der Darstellung von $\langle \alpha \rangle$ auf N gilt:

Permutationsdarstellung r > 2	$Z_r(0)$ rs = n	$Z_r(1)$ rs = n-1	$Z_r(2)$ rs = n-2
Eigenwerte			
1	s-1	s-1	s-1
ξ	s-1	s-1	s
ξ^i ($i \in \{2, \dots, r-2\}$)	s	s	s
ξ^{-1}	s-1	s	s

Permutationsdarstellung r=2	$Z_2(0)$		$Z_2(2)$
Eigenwerte			
1	$\frac{n}{2} - 1$		$\frac{n}{2} - 2$
-1	$\frac{n}{2} - 2$		$\frac{n}{2} - 1$

Beweis: Die Behauptung folgt aus Satz(5.4), weil $T(R_{n,f})$ die Zerlegung

$$T_f(R_{n,f}) = T_f(\Gamma_f) \oplus N'$$

besitzt.

In den folgenden Abschnitten werden die Charaktere der Darstellungen von $\langle \alpha \rangle$ auf N benötigt.

Definition (5.6): Die Darstellung der Isotropiegruppe Γ_f auf dem Normalenraum N wird im folgenden mit ρ bezeichnet, ihr Charakter mit χ_ρ .

Es gilt:

Lemma (5.7): Es sei $\langle \alpha \rangle < \Gamma_f$, $\text{ord}(\alpha) = r \geq 2$. In Abhängigkeit von der Permutationsdarstellung von $\langle \alpha \rangle \cong Z_r$ auf der Nullstellenmenge M von f gilt für den Charakter χ_ρ :

- | | | | |
|------|--|--------------------|----------|
| i) | $\chi_\rho(\alpha^i) = - (1 + \xi^i + \xi^{-i})$ | beim Isomorphietyp | $Z_r(0)$ |
| ii) | $\chi_\rho(\alpha^i) = - (1 + \xi^i)$ | " | $Z_r(1)$ |
| iii) | $\chi_\rho(\alpha^i) = - 1$ | " | $Z_r(2)$ |

(für $i=1, \dots, r-1$, ξ ist wieder primitive r -te Einheitswurzel.)

Beweis: Der Beweis ergibt sich direkt durch Summation aus (5.5).

Jetzt können die Anzahlen der irreduziblen Darstellungen der übrigen Gruppen leicht bestimmt werden:

5.3.2 Die irreduziblen Darstellungen von D_r auf N

Ist f eine Form mit der Isotropiegruppe $\Gamma_f \cong D_r$, so darf o.E. angenommen werden, daß $\Gamma_f = D_r$ ist (vgl. 3.1.2). Es können die Isomorphietypen $D_r(p,q)$ ($p \in \{0,2\}$ und $q \in \{0,1,2\}$) auftreten. Zur Berechnung des Charakters χ_ρ der Darstellung von D_r auf N muß geklärt werden, wieviele Fixpunkte die Elemente von D_r für gegebene Werte p,q in der Verzweigungsmenge M besitzen.

a) Elemente von $\mathcal{J}_r \triangleleft D_r$:

p gibt die Zahl der Fixpunkte aller Elemente ($\neq 1$) an (vgl. Definition (2.9)).

b) Nicht-normale Involutionen $\alpha^i t$ ($i \in \{0, \dots, r-1\}$):

q gibt die Zahl der r -elementigen Ausnahmebahnen von D_r in M

an. Die Fixpunkte der Involutionen $\alpha^i t$ liegen in diesen beiden Ausnahmebahnen. Daraus ergibt sich, daß diese im Fall $q=0$ alle vom Typ $Z_2(0)$ und im Fall $q=2$ alle vom Typ $Z_2(2)$ sind. Es bleibt der Fall $q=1$ und o.E. darf angenommen werden, daß die Bahn von $1 \in P_1$ in M liegt. Wegen $q=1$ ist s ungerade (vgl. (2.4 und 2.5.a), also r gerade. Die Involutionen $\alpha^i t$ bilden in diesem Fall zwei Konjugationsklassen und nach Bemerkung (2.4) liegen beide Fixpunkte der Elemente der Konjugationsklasse von t in der Bahn $\{1, \xi, \dots, \xi^{r-1}\}$. Die Fixpunkte der Elemente der anderen Klasse liegen nicht in M .

Damit erhält man für den Charakter χ_ρ :

Lemma (5.8): Ist f eine binäre Form mit $\Gamma_f \cong D_r$, und der Isomorphietyp der Darstellung von Γ_f auf den Wurzeln von f gleich $D_r(p, q)$, so gilt für den Charakter der Darstellung ρ von Γ_f auf N :

	$\chi_\rho(\alpha^i) \quad i \in \{1, \dots, r-1\}$		$\chi_\rho(\alpha^i t) \quad (i \in \{0, \dots, r-1\})$	$\chi_\rho(\text{id})$
	$p=0$	$p=2$		
$q=0$	$-(1+\xi^i + \xi^{-i})$	-1	1	$n-3$
$q=1$	$-(1+\xi^i + \xi^{-i})$	-1	$(-1)^i \quad 1)$	$n-3$
$q=2$	$-(1+\xi^i + \xi^{-i})$	-1	-1	$n-3$

mit $\Gamma_f = \langle \alpha, t \rangle$, ord $\alpha = r$, $\alpha^t = \alpha^{-1}$, ord $t = 2$
¹⁾ t sei o.E. ohne Fixpunkte in M gewählt
 ξ bezeichnet eine primitive r -te Einheitswurzel

Beweis: Ergibt sich aus den vorausgehenden Überlegungen und

Lemma (5.7). $\chi_\rho(\text{id}) = n-3$, weil $\dim N = n-3$ ist

Mit Hilfe einer Charaktertafel von D_r lassen sich jetzt die Vielfachheiten der irreduziblen Darstellungen von $\Gamma_f \cong D_r$ auf N berechnen.

Dazu bezeichne wie bei Serre ([S] , §2)

$$(\phi|\psi)$$

das Skalarprodukt der Charaktere ϕ, ψ von zwei linearen Darstellungen einer endlichen Gruppe G.

Die irreduziblen zweidimensionalen Darstellungen von $D_r = \langle \alpha, t \rangle$ werden nach Wahl einer Basis und einer primitiven r-ten Einheitswurzel ξ durch

$$\rho_j(\alpha) = \begin{pmatrix} \xi^j & 0 \\ 0 & \xi^{-j} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \rho_j(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } 1 \leq j < \frac{r}{2}$$

gegeben.

Die eindimensionalen Darstellungen werden mit $\rho_{00}, \rho_{01}, \rho_{10}$ und ρ_{11} bezeichnet (die letzten beiden treten nur auf, wenn r gerade ist) und durch folgende Tabelle beschrieben:

	ρ_{00}	ρ_{01}	ρ_{10}	ρ_{11}	
α^k	1	1	$(-1)^k$	$(-1)^k$	} $k \in \{0, \dots, r-1\}$
$\alpha^k t$	1	-1	$(-1)^k$	$(-1)^{k+1}$	
	für $r \equiv 0(2)$				

Beispiel: $\Gamma_F = D_r$ vom Isomorphietyp $D_r(0, q)$, $q \in \{0, 1, 2\}$

Für $1 < j \leq \frac{r}{2}$ gilt:

$$\begin{aligned} |D_r| \cdot (\chi_\rho | \chi_{\rho_j}) &= 2(n-3) + \sum_{i=1}^{r-1} -(\xi^i j + \xi^{-i} j)(1 + \xi^i + \xi^{-i}) + r \cdot 0 \cdot 1 \\ &= 2n-6 - \sum_{i=1}^{r-1} (\xi^i j + \xi^{-i} j + \xi^{(j+1)i} + \xi^{-(j+1)i} + \xi^{(j-1)i} + \xi^{-(j-1)i}) \\ &= 2n - \sum_{i=0}^{r-1} (\xi^i j + \xi^{-i} j + \xi^{(j+1)i} + \xi^{-(j+1)i} + \xi^{(j-1)i} + \xi^{-(j-1)i}) \end{aligned}$$

Wegen $\sum_{i=0}^{r-1} (\xi^k)^i = 0$ für $1 \leq k \leq r-1$ und $1 \leq j \leq \frac{r}{2}$

gilt

$$|D_r| (\chi | \chi_{\rho_j}) = 2n \quad \text{falls } j \neq 1$$

sowie $|D_r| (\chi | \chi_{\rho_1}) = 2n - 2r$

Auf diese Weise erhält man

Lemma (5.9): Es sei $\Gamma_f \cong D_r$, Γ_f vom Isomorphietyp $D_r(p,q)$ auf der Nullstellenmenge von f . Dann treten die irreduziblen Darstellungen von D_r mit folgenden Vielfachheiten in der Darstellung von Γ_f auf N auf:

p	q	ρ_1	ρ_j $2 \leq j < \frac{r}{2}$	ρ_{00}	ρ_{01}	falls $r \equiv 0(2)$	
						ρ_{10}	ρ_{11}
0	0	$s-1$	s	$\frac{s}{2}$	$\frac{s-2}{2}$	$\frac{s}{2}$	$\frac{s}{2}$
	1	$s-1$	s	$\frac{s-1}{2}$	$\frac{s-1}{2}$	$\frac{s+1}{2}$	$\frac{s-1}{2}$
	2	$s-1$	s	$\frac{s-2}{2}$	$\frac{s}{2}$	$\frac{s}{2}$	$\frac{s}{2}$
2	0	s	s	$\frac{s}{2}$	$\frac{s-2}{2}$	$\frac{s}{2}$	$\frac{s}{2}$
	1	s	s	$\frac{s-1}{2}$	$\frac{s-1}{2}$	$\frac{s+1}{2}$	$\frac{s-1}{2}$
	2	s	s	$\frac{s-2}{2}$	$\frac{s}{2}$	$\frac{s}{2}$	$\frac{s}{2}$

Im Fall $q=1$ bedeutet t in der Festlegung der Darstellungen eine Involution ohne Fixpunkte in M .

5.3.3 Die irreduziblen Darstellungen der Klein'schen Vierergruppe auf N

Die irreduziblen Darstellungen von V_4 sind alle eindimensional. Es sei $V_4 = \{1, s, t, u\}$, dann lautet die Charaktertafel

	1	s	t	u
χ_o	1	1	1	1
χ_s	1	1	-1	-1
χ_t	1	-1	1	-1
χ_u	1	-1	-1	1

$\chi_o, \chi_s, \chi_t, \chi_u$ seien die Charaktere der entsprechend bezeichneten Darstellungen $\rho_o, \rho_s, \rho_t, \rho_u$.

V_4 besitzt die vier Isomorphietypen $V_4(i)$, $i \in \{0,1,2,3\}$ (vgl. 3.2.2), die allerdings für gegebenes n jeweils nur paarweise auftreten können. i gibt die Zahl der Ausnahmehalben von V_4 in M an.

Für den Charakter der Darstellung von $\Gamma_f \simeq V_4$ auf N erhält man mit Hilfe von Lemma (5.7) folgende Werte:

Isomorphietyp	$\chi_\rho(1)$	$\chi_\rho(s)$	$\chi_\rho(t)$	$\chi_\rho(u)$
$V_4(0)$	$n-3$	1	1	1
$V_4(1)^{1)}$	$n-3$	-1	1	1
$V_4(2)^{2)}$	$n-3$	1	-1	-1
$V_4(3)$	$n-3$	-1	-1	-1

- 1) Es wird angenommen, daß s die Involution mit Fixpunkten in M ist.
 2) Es wird angenommen, daß s die Involution ohne Fixpunkte in M ist.

Daraus ergibt sich

Lemma (5.10): Es sei $\Gamma_f \simeq V_4$, Γ_f vom Isomorphietyp $V_4(i)$ auf der Nullstellenmenge von f , $i \in \{0,1,2,3\}$. Dann treten die irreduziblen Darstellungen von V_4 mit folgenden Vielfachheiten auf

Isomorphietyp	ρ_o	ρ_s	ρ_t	ρ_u
$V_4(0)$	$\frac{n}{4}$	$\frac{n-4}{4}$	$\frac{n-4}{4}$	$\frac{n-4}{4}$
$V_4(1)$	$\frac{n-2}{4}$	$\frac{n-6}{4}$	$\frac{n-2}{4}$	$\frac{n-2}{4}$
$V_4(2)$	$\frac{n-4}{4}$	$\frac{n}{4}$	$\frac{n-4}{4}$	$\frac{n-4}{4}$
$V_4(3)$	$\frac{n-6}{4}$	$\frac{n-2}{4}$	$\frac{n-2}{4}$	$\frac{n-2}{4}$

5.3.4 Die irreduziblen Darstellungen der Tetraedergruppe auf N

Die Anzahlen der Fixpunkte von Elementen einer Isotropiegruppe $\Gamma_f \simeq A_4$ kann man direkt der Tabelle in 4.2.4 entnehmen. Dies erlaubt die Berechnung des Charakters der Darstellung von Γ_f auf N mit Hilfe von Lemma (5.7). In Abhängigkeit von n (der Isomorphietyp ist durch n bestimmt) erhält man folgende Werte:

	Konjugationsklasse von		Konjugationsklasse der	id
	ω	ω^2	Involutionen	
$n \equiv 0(12)$	0	0	1	n-3
$n \equiv 4(12)$	ρ	ρ^2	1	n-3
$n \equiv 8(12)$	-1	-1	1	n-3
$n \equiv 6(12)$	0	0	-1	n-3
$n \equiv 10(12)$	ρ^2	ρ	-1	n-3
$n \equiv 14(12)$	-1	-1	-1	n-3

ω bezeichne ein Element der Ordnung 3 und ρ eine primitive 3. Einheitswurzel

Die irreduziblen Darstellungen von A_4 sind:

- ρ_3 - dreidimensionale Darstellung in SO_3
- $\rho_1, \bar{\rho}_1$ - die beiden eindimensionalen Darstellungen mit Kern V_4
- ρ_0 - die triviale eindimensionale Darstellung

$\chi_3, \chi_1, \bar{\chi}_1, \chi_0$ bezeichnen die zugehörigen Charaktere (vgl. Anhang C).

Man erhält

Lemma (5.11): Es sei $\Gamma_f \cong A_4$. Dann treten die irreduziblen Darstellungen von A_4 mit folgenden Vielfachheiten in der Darstellung von Γ_f auf N auf:

$n \bmod 12$	ρ_3	ρ_1	$\bar{\rho}_1$	ρ_0
0	$\frac{n-4}{4}$	$\frac{n}{12}$	$\frac{n}{12}$	$\frac{n}{12}$
4	$\frac{n-4}{4}$	$\frac{n+8}{12}$	$\frac{n-4}{12}$	$\frac{n-4}{12}$
8	$\frac{n-4}{4}$	$\frac{n+4}{12}$	$\frac{n+4}{12}$	$\frac{n-8}{12}$
6	$\frac{n-2}{4}$	$\frac{n-6}{12}$	$\frac{n-6}{12}$	$\frac{n-6}{12}$
10	$\frac{n-2}{4}$	$\frac{n+2}{12}$	$\frac{n-10}{12}$	$\frac{n-10}{12}$
14	$\frac{n-2}{4}$	$\frac{n-2}{12}$	$\frac{n-2}{12}$	$\frac{n-14}{12}$

5.3.5 Die irreduziblen Darstellungen der Oktaeder- und Ikosaedergruppe auf N

Bei beiden Gruppen ist der Isomorphietyp der Darstellung auf den Wurzeln durch n bestimmt (vgl. 3.2.2). Die Anzahl der Fixpunkte ihrer Elemente kann wieder den Gruppendiagrammen in 4.2.5 und 4.2.6 entnommen werden. Lemma (5.7) führt zur Berechnung des Charakters χ_p der Darstellung von Γ_f auf N :

Werte von χ_p für die Darstellung von $\Gamma_f \approx S_4$ auf N				
$n \bmod 24$	Involutionen aus $V_4 \triangleleft S_4$	Involutionen außerhalb von $V_4 \triangleleft S_4$	Elemente der Ordnung	
			3	4
0	1	1	0	-1
6	-1	1	0	-1
8	1	1	-1	-1
12	1	-1	0	-1
14	-1	1	-1	-1
18	-1	-1	0	-1
20	1	-1	-1	-1
26	-1	-1	-1	-1

Werte von χ_p für die Darstellung von $\Gamma_f \approx A_5$ auf N				
λ bezeichne ein Element der Ordnung 5 von A_5 , ε eine primitive 5. Einheitswurzel. Es ist $\varepsilon + \varepsilon^4 = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$ und $\varepsilon^2 + \varepsilon^3 = \frac{1}{2}(-\sqrt{5}-1)$ bei geeigneter Wahl von $\sqrt{5}$				
$n \bmod 60$	Klasse von λ	Klasse von λ^2	Elemente der Ordnung	
			3	4
0	$\varepsilon^2 + \varepsilon^3$	$\varepsilon + \varepsilon^4$	0	1
12	-1	-1	0	1
20	$\varepsilon^2 + \varepsilon^3$	$\varepsilon + \varepsilon^4$	-1	1
30	$\varepsilon^2 + \varepsilon^3$	$\varepsilon + \varepsilon^4$	0	-1
32	-1	-1	-1	1
42	-1	-1	0	-1
50	$\varepsilon^2 + \varepsilon^3$	$\varepsilon + \varepsilon^4$	-1	-1
62	-1	-1	-1	-1

Bemerkung: In beiden Fällen hat χ_p wegen $\dim N = n-3$ für $n \geq 4$ den Wert $n-3$

Als Bezeichnungen der irreduziblen Darstellungen werden gewählt

- für $\Gamma_f \simeq S_4$:
- ρ_3 die Darstellung von S_4 in $SO_3(k)$
 - ρ'_3 die Darstellung von S_4 als dreidimensionale Spiegelungsgruppe
 - ρ_2, ρ_1, ρ_0 die Darstellungen der Dimensionen 2, 1, 1 mit Kern V_4, A_4, S_4

- für $\Gamma_f \simeq A_5$:
- ρ_5, ρ_4 die 5- bzw. 4-dimensionalen Darstellungen
 - ρ_3, ρ'_3 die beiden dreidimensionalen Darstellungen
 - ρ_0 die triviale Darstellung

Mit den Charaktertafeln dieser Darstellungen (Anhang C) erhält man

Lemma (5.12): Es sei $\Gamma_f \simeq S_4$ bzw. $\Gamma_f \simeq A_5$. Dann treten die irreduziblen Darstellungen von S_4 bzw. A_5 mit folgenden Vielfachheiten in der Darstellung von Γ_f auf N auf:

$\Gamma_f \simeq S_4$	n mod 24	ρ_3	ρ'_3	ρ_2	ρ_1	ρ_0
	0	$\frac{n-8}{8}$	$\frac{n}{8}$	$\frac{n}{12}$	$\frac{n}{24}$	$\frac{n}{24}$
	6	$\frac{n-6}{8}$	$\frac{n+2}{8}$	$\frac{n-6}{12}$	$\frac{n-6}{24}$	$\frac{n-6}{24}$
	8	$\frac{n-8}{8}$	$\frac{n}{8}$	$\frac{n+4}{12}$	$\frac{n-8}{24}$	$\frac{n-8}{24}$
	12	$\frac{n-4}{8}$	$\frac{n-4}{8}$	$\frac{n}{12}$	$\frac{n+12}{24}$	$\frac{n-12}{23}$
	14	$\frac{n-6}{8}$	$\frac{n+2}{8}$	$\frac{n-2}{12}$	$\frac{n-14}{24}$	$\frac{n-14}{24}$
	18	$\frac{n-2}{8}$	$\frac{n-2}{8}$	$\frac{n-6}{12}$	$\frac{n+6}{24}$	$\frac{n-18}{24}$
	20	$\frac{n-4}{8}$	$\frac{n-4}{8}$	$\frac{n+4}{12}$	$\frac{n+4}{24}$	$\frac{n-20}{24}$
	26	$\frac{n-2}{8}$	$\frac{n-2}{8}$	$\frac{n-2}{12}$	$\frac{n-2}{24}$	$\frac{n-26}{24}$

$\Gamma_f \simeq A_5$

$n \bmod 60$	ρ_5	ρ_4	ρ_3	ρ_3'	ρ_o
0	$\frac{n}{12}$	$\frac{n}{15}$	$\frac{n}{20}$	$\frac{n-20}{20}$	$\frac{n}{60}$
12	$\frac{n}{12}$	$\frac{n+3}{15}$	$\frac{n-12}{20}$	$\frac{n-12}{20}$	$\frac{n-12}{60}$
20	$\frac{n+4}{12}$	$\frac{n-5}{15}$	$\frac{n}{20}$	$\frac{n-20}{20}$	$\frac{n-20}{60}$
30	$\frac{n-6}{12}$	$\frac{n}{15}$	$\frac{n+10}{20}$	$\frac{n-10}{20}$	$\frac{n-30}{60}$
32	$\frac{n+4}{12}$	$\frac{n-2}{15}$	$\frac{n-12}{20}$	$\frac{n-12}{20}$	$\frac{n-32}{60}$
42	$\frac{n-6}{12}$	$\frac{n+3}{15}$	$\frac{n-2}{20}$	$\frac{n-2}{20}$	$\frac{n-42}{60}$
50	$\frac{n-2}{12}$	$\frac{n-5}{15}$	$\frac{n+10}{20}$	$\frac{n-10}{20}$	$\frac{n-50}{60}$
2	$\frac{n-2}{12}$	$\frac{n-2}{15}$	$\frac{n-2}{20}$	$\frac{n-2}{20}$	$\frac{n-62}{60}$

6. Der étale Morphismus von N/Γ_f nach M_k

In Kapitel 5 wurde die lineare Operation von Γ_f auf dem Normalenraum N untersucht. Jetzt wird gezeigt, daß zwischen N/Γ_f und M_k eine enge Beziehung besteht, die man sich folgendermaßen veranschaulichen kann:

Beispiel: $\mathbb{C}^x$ operiert auf $\mathbb{C}^2$ durch

$$\lambda(x,y) = (\lambda x, \lambda^2 y)$$

Die Isotropiegruppe von

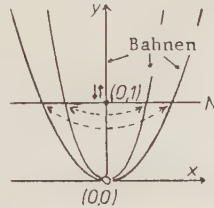
$$(0,1) \text{ ist } \mathbb{Z}_2 = \langle -1 \rangle$$

Das Auftreten der Isotro-

piegruppe $\Gamma_f \neq 1$ bedeutet,

daß die Bahn Γ_f mehrfach

durch f verläuft. Die Bahnen "in der Nähe" von Γ_f schneiden einen Γ_f -stabilen Normalenraum zu Γ_f mehrmals, die Schnittpunkte werden durch Γ_f identifiziert. Der Quotient N/Γ_f entspricht also dem Bahnenraum.



Anders als im obigen Beispiel braucht im allgemeinen zwischen einem Quotienten nach einer Gruppe Γ und dem Quotienten eines Normalenraums nach der Isotropiegruppe Γ_f keine bijektive Beziehung bestehen. Mit den Methoden von Luna ([L]) zeigt man allerdings, daß lokal ein étaler Morphismus von N/Γ_f in den Quotienten, hier also in die Modulmannigfaltigkeit M_k existiert.

Man betrachte auf $\Gamma \times N$ die Operation von Γ_f , die durch

$$(g,n)^s := (gs, s^{-1}n) \quad (g \in \Gamma, n \in N, s \in \Gamma_f)$$

gegeben ist. (N ist stabil unter Γ_f)

Definition (6.1): Der Quotient von $\Gamma \times N$ nach dieser Γ_f -Operation wird mit

$$\Gamma \times_{\Gamma_f} N$$

bezeichnet ([L], 3. Fibrés). Das Bild von (g,n) wird $[g,n]$ geschrieben.

(Die Existenz des Quotienten ist hier wegen $|\Gamma_f| < \infty$ unmittelbar klar.)

Es gilt

Lemma (6.2):

a) $\Gamma \times_{\Gamma_f} N$ ist glatt.

b) Durch $g'[g,n] = [g'g,n]$ ist eine Γ -Operation

auf $\Gamma \times_{\Gamma_f} N$ gegeben, ihr Quotient ist

$$\begin{array}{ccc} \Gamma \times_{\Gamma_f} N & \longrightarrow & N/\Gamma_f \\ [g,n] & \longmapsto & \bar{n} \end{array}$$

(wobei $\bar{n}$ das Bild von n im Quotienten N/Γ_f bezeichnet.)

Beweis: a) $\Gamma \times_{\Gamma_f} N$ ist Totalraum einer étale-trivialen Faserung vom Fasertyp N mit der Basis Γ/Γ_f ([L], 3.Fibrés)

D.h. es existiert eine irreduzible Mannigfaltigkeit B' und ein étaler, surjektiver Morphismus

$$\phi: B' \longrightarrow \Gamma/\Gamma_f$$

so daß das Faserprodukt

$$B' \times_{\Gamma/\Gamma_f} (\Gamma \times_{\Gamma_f} N)$$

isomorph ist zu $B' \times N$:

$$\begin{array}{ccccc} B' \times N & \xrightarrow{\sim} & B' \times_{\Gamma/\Gamma_f} (\Gamma \times_{\Gamma_f} N) & \xrightarrow{\hat{\phi}} & \Gamma \times_{\Gamma_f} N \\ & \searrow & \downarrow & & \downarrow \\ & & B' & \xrightarrow{\phi} & \Gamma/\Gamma_f \end{array}$$

Γ/Γ_f und damit B' und $B' \times N$ sind glatt. Weil mit ϕ auch $\hat{\phi}$ étale ist (Basiswechsel), überträgt sich die Glätte auf $\Gamma \times_{\Gamma_f} N$.

b) Die Fasern sind genau die G-Bahnen. N/Γ_f ist mit N normal. Wegen der Surjektivität ist N/Γ_f der Quotient ([K2], S.112). Dies war zu zeigen.

$$\psi: \Gamma \times N \longrightarrow R_n$$

bezeichne den Morphismus, den man durch die Restriktion der Operation von Γ auf R_n erhält. Nach Konstruktion von $\Gamma \times_{\Gamma_f} N$ ist es möglich, zum Quotienten überzugehen:

$$\begin{array}{ccc} \phi: \Gamma \times_{\Gamma_f} N & \longrightarrow & R_n \\ [g,n] & \longmapsto & g_n \end{array}$$

ist ein Γ -äquivarianter Morphismus, der auf der Bahn von $[1,f]$ injektiv ist.

Satz (6.3): ϕ ist in $[1, f]$ étale. ($f \in R_n^\Delta$)

Beweis: Weil R_n und $\Gamma \times_{\Gamma_f} N$ glatt sind, genügt es nachzuweisen, daß $d\phi_{[1, f]}$ ein f Isomorphismus der Tangentialräume ist ([M], S.356). Weil Γ_f endlich ist und wegen der Kommutativität des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} \Gamma \times N & \xrightarrow{\psi} & R_n \\ & \searrow & \nearrow \phi \\ & \Gamma \times_{\Gamma_f} N & \end{array}$$

genügt es, dies für ψ zu zeigen. Dazu betrachtet man zunächst

$$\hat{\psi}: SL_2(k) \times V \longrightarrow V$$

mit $d\hat{\psi}_{(1, f)} = d_1 \hat{o}_f + id_V$ ($d_1 \hat{o}_f$ wie in 5.2). Der Übergang zu ψ liefert

$$d\psi_{[1, f]} = d_1 o_f + id_{N'}, \quad (N' \text{ wie in 5.2})$$

Weil das Bild $d_1 o_f(SL_2(k))$ den Tangentialraum der Bahn $T_f(\Gamma f)$ aufspannt und N' ein Komplement zu $T_f(\Gamma f)$ ist, muß $d\psi_{(1, f)}$ surjektiv sein. Wegen der Gleichheit der Dimension von $\Gamma \times N$ und R_n muß $d\psi_{(1, f)}$ schließlich Isomorphismus sein.

ϕ ist der Morphismus, der im folgenden "Fundamentallema" von Luna ([L]) zur Konstruktion einer "étalen Scheibe" dient:

Fundamentallema (6.4): Es sei Γ eine reduktive Gruppe, die auf zwei affinen Varietäten X und Y operiert und $\phi: X \longrightarrow Y$ ein Γ -Morphismus, x ein normaler Punkt von X . Es wird vorausgesetzt, daß ϕ in x étale ist und die Bahnen Γ_x und $\Gamma_{\phi(x)}$ abgeschlossen sind, und daß schließlich die Restriktion von ϕ auf Γ_x injektiv ist.

Dann existiert eine offene, affine Umgebung U von x mit folgenden Eigenschaften (π_x, π_y bezeichnen die Quotientenabbildungen auf X/Γ und Y/Γ):

U ist G -saturiert, die Restriktion von ϕ auf U ist étale, $V := \phi(U)$ ist eine offene saturierte Umgebung von $\phi(x)$. Der von ϕ auf dem Quotienten nach der Γ -Operation induzierte Morphismus

$\phi/\Gamma : U/\Gamma \longrightarrow V/\Gamma$
 ist étale, $\phi: U \longrightarrow V$ und $\pi_X: U \longrightarrow U/\Gamma$ induzieren
 einen G-Isomorphismus

$$\chi: U \longrightarrow V \times_{V/\Gamma} U/\Gamma$$

Aus dem letzten Satz ergibt sich

Folgerung (6.5): Für $\xi \in U/\Gamma$ induziert ϕ einen Γ -Isomorphismus
 der Fasern

$$\pi_X^{-1}(\xi) \longrightarrow \pi_Y^{-1}(\phi/\Gamma(\xi))$$

Beweis von (6.4) bei Luna ([L], II.2).

Zur Anwendung des Fundamentallemmas wird ϕ auf das Urbild von R_n^Δ
 beschränkt. Da Separabilität von Formen bei der Γ -Operation erhalten
 bleibt, ist

$$\phi^{-1}(R_n^\Delta) = \{ [g, n] \in \Gamma \times_{\Gamma_f} N \mid n \in N \cap R_n^\Delta \}$$

Γ -saturiert. $N^\Delta := N \cap R_n^\Delta$ ist Γ_f -saturiert und offen in N . Das Bild
 von $\phi^{-1}(R_n^\Delta)$ im Quotienten

$$\Gamma \times_{\Gamma_f} N \longrightarrow N/\Gamma_f$$

ist das Bild von N^Δ in N/Γ_f , insbesondere also eine Umgebung des
 Bildes $\bar{f}$ von f in N/Γ_f .

Damit erhält man:

Satz (6.6): Es existiert eine offene, affine, saturierte Umgebung
 U von $[1, f] \in \Gamma \times_{\Gamma_f} N$ mit folgenden Eigenschaften:

$V = \phi(U) \subset R_n^\Delta$ ist offen, affin und saturiert, die Res-
 triktion von ϕ auf U ist étale. Der Morphismus

$$\phi/\Gamma : U/\Gamma \longrightarrow V/\Gamma \subset R_n^\Delta/\Gamma = M_k$$

ist étale und die Fasern über $\xi \in U/\Gamma$ und $\phi/\Gamma(\xi)$
 sind (vermöge ϕ) Γ -isomorph.

Beweis: Die Behauptung ist die direkte Folge des Fundamental-
 lemmas angewandt auf die Restriktion von ϕ auf $\phi^{-1}(R_n^\Delta)$.
 Γ ist reduktiv ([N], S.50); $\phi^{-1}(R_n^\Delta)$ ist glatt
 (vgl. (6.2)) also normal, alle übrigen Voraussetzungen
 wurden in Kapitel 6 gezeigt.

Folgerung (6.7): Es existiert eine Γ_f -saturierte Umgebung U' von f in N , so daß für alle $f' \in U'$ gilt:

$$\Gamma_{f'} \leq \Gamma_f$$

Beweis: Nach (6.6) wird $U \subset \phi^{-1}(R_n^\Delta) \subset \Gamma \times_{\Gamma_f} N$ gewählt.
Für $n \in N$ und $g \in \Gamma$ gilt nach Γ_f Definition von $\Gamma \times_{\Gamma_f} N$:

$$g[1,n] = [g,n] = [1,n] \iff g \in \Gamma_f \text{ und } g_n = n.$$

D.h. die Isotropiegruppe von $[1,n]$ ist in Γ_f enthalten. Nach (6.5) sind die Γ -Bahnen von $[1,n] \in U$ und $\phi([1,n]) = n$ vermöge ϕ isomorph.
 $U' := \{n \in N \mid [1,n] \in U\}$ ist die gesuchte Umgebung.

Zusammenfassung:

Satz (6.6) reduziert die lokale Untersuchung der Modulmannigfaltigkeit auf die Untersuchung des Quotienten des $(n-3)$ -dimensionalen Raums N nach der linearen Operation der endlichen Gruppe Γ_f . Diese wurde in 5.3 beschrieben.

Definition (6.8): Der Quotient der Umgebung U' von f in N nach der Isotropiegruppe Γ_f wird im folgenden mit $\bar{U}$ bezeichnet. Es ist

$$U/\Gamma \simeq \bar{U} = U'/\Gamma_f \subset N/\Gamma_f$$

$\bar{U}$ dient im folgenden zur lokalen Untersuchung der Modulmannigfaltigkeit.

7. Strukturen der Modulmannigfaltigkeit

7.1 Der Satz von Fischer-Igusa

Weil der étale Morphismus von $\bar{U}$ (vgl. (6.6) und (6.7)) in die Modulmannigfaltigkeit Singularität überträgt, genügt es zur Feststellung von Singularitäten in M_k die Singularitäten einer Umgebung des Nullpunkts von N/Γ_f für beliebige binäre Formen $f \in R_n^\Delta$ zu untersuchen. Dies liefert den

Satz (Fischer-Igusa)

Die Modulmannigfaltigkeit M_k ist für $g \geq 3$ genau in den Modulpunkten von Kurven mit nichttrivialer Automorphismengruppe singular.

Für $g=2$ gilt: M_k ist genau in dem Punkt singular, der zur Kurve

$$y^2 = x^6 - x$$

gehört.

Beweis:

a) Die Modulmannigfaltigkeit ist in den Punkten mit trivialer Automorphismengruppe glatt: Es sei $f \in R_n^\Delta$ und $\Gamma_f=1$. Satz (6.6) liefert einen étalen Morphismus einer Umgebung $\bar{U} \subset N/\Gamma_f = N$ in die Modulmannigfaltigkeit. Diese ist also glatt in der Umgebung des Modulpunkts von f .

b) Ist $\Gamma_f \neq 1$, so wird gezeigt, daß ein Automorphismus $\alpha \in \Gamma_f$, $\alpha \neq 1$ nur dann als Spiegelung auf N operiert, wenn $g=2$ ist und wenn α Involution vom Isomorphietyp $Z_2(0)$ auf M ist.

b1) Es sei zunächst $\text{ord } \alpha \geq 3$: Dann besitzt α mindestens zwei von 1 verschiedene Eigenwerte auf N , wenn $s \neq 1$ ist (vgl. Folgerung (5.5)). Im Fall $s=1$ tritt 1 nicht als Eigenwert auf.

b2) Für Involutionen $\alpha \in \Gamma_f$ gilt:

Die Zahl der Eigenwerte -1 ist mindestens $\frac{n-4}{2}$, also größer als 1 falls $n \geq 8$ bzw. $g \geq 3$ ist. Im Fall $n=6$ ($g=2$) haben genau die Involutionen mit der Permutationsdarstellung vom Typ $Z_2(0)$ zwei Eigenwerte 1 und einen Eigenwert -1 .

c) Der Quotient N/Γ_f ist genau dann glatt, wenn er ein affiner Raum ist ([K2], S.154). Letzteres gilt genau dann, wenn Γ_f

Spiegelungsgruppe ist ([S2], S.76) Mit Satz (6.6) ist die Behauptung also für $g > 2$ gezeigt.

Es bleibt der Fall $g=2$; hier ist zu überprüfen, wann Γ_f von Spiegelungen (auf N) erzeugt wird, dies sind nach b2) nur die Involutionen vom Typ $\mathbb{Z}_2(0)$. Die reduzierten Automorphismengruppen im Fall $g=2$ ergeben sich aus den Abschnitten 1.) bis 3) bzw. kürzer aus [G], S.38.ff .

- i) $\Gamma_f \simeq \mathbb{Z}_5$: Γ_f enthält keine Involutionen, dies liefert den singulären Punkt von M_k .
- ii) $\Gamma_f \simeq D_6$ und $y^2 = x^6 - 1$: Die Automorphismen $x \mapsto \xi x^{-1}$ (ξ primitive 6.Einheitswurzel) und $x \mapsto -x^{-1}$ sind ohne Fixpunkt und erzeugen D_6 .
- iii) $\Gamma_f \simeq S_4$ und $y^2 = x^5 - x$: Es ist $M = \{0, \infty, 1, i, -1, -i\}$, das Oktaeder M hat 6 fixpunktfreie Involutionen.
- iv) $\Gamma_f \simeq D_3$ und $y^2 = (x^3 - 1)(x^3 - \lambda)$: Die fixpunktfreien Involutionen $x \mapsto \alpha x^{-1}$, $x \mapsto \alpha^2 x^{-1}$ ($\alpha^3 = \lambda$) erzeugen Γ_f .
- v) $\Gamma_f \simeq V_4$ und $y^2 = x(x^2 - 1)(x^2 - \lambda)$: Die erzeugenden fixpunktfreien Involutionen sind $x \mapsto \alpha x^{-1}$, $x \mapsto -\alpha x^{-1}$ ($\alpha^2 = \lambda$).
- vi) $\Gamma_f \simeq \mathbb{Z}_2$ und $y^2 = (x^2 - 1)(x^2 - \lambda)(x^2 - \mu)$: $x \mapsto -x$ ist fixpunktfrei.

Die Modulmannigfaltigkeit M_k ist normal, weil N/Γ_f für alle binären Formen normal ist.

7.2 Die Stratifikation der Modulmannigfaltigkeit M_k

Es soll gezeigt werden, daß die in 4.3 definierten Mengen $M(\pi_G)$ der Modulpunkte von Kurven mit reduzierter Automorphismengruppe G vom Isomphietyp π_G eine Art Stratifikation der Modulmannigfaltigkeit M_k liefern.

Satz (7.1): Es sei π_G der Isomphietyp einer linearen Permutationsgruppe derart, daß $M(\pi_G) \neq \emptyset$ ist (vgl. (4.9)).

a) $\overline{M(\pi_G)}$ ist abgeschlossen und irreduzibel mit

$$\dim M(\pi_G) = \dim (I_n(\pi_G)/\mathcal{K}(q))$$

b) $M(\pi_G)$ ist offen in $\overline{M(\pi_G)}$ und glatt.

c) In Punkten $x \in M(\pi_G)$ ist die Modulmannigfaltigkeit M_k lokal und bis auf einen étalen Morphismus das Produkt von $M(\pi_G)$ mit dem Quotienten eines linearen Raums L nach Γ_f . Dieser wird von π_G bestimmt. Genauer: f sei eine x zugehörige binäre Form, $N = M \times L$ sei die Zerlegung des Normalenraums N in die Fixpunktmenge M von Γ_f und ein Γ_f -stabiles Komplement. Dann ist $N/\Gamma_f = M \times L/\Gamma_f$ und in der Umgebung $\bar{U}$ ist M Urbild von $M(\pi_G)$ unter dem étalen Morphismus ϕ/Γ , der N/Γ_f auf eine Umgebung von x im M_k abbildet.

Beweis:

a) Gezeigt wird: $M_k \setminus \overline{M(\pi_G)}$ ist offen.

Es sei $x \in M_k \setminus \overline{M(\pi_G)}$, f eine zugehörige binäre Form und U' wie in Folgerung (6.7) gewählt. D.h. für $f' \in U'$ ist $\Gamma_{f'} \leq \Gamma_f$. Es genügt zu zeigen, daß $\Gamma_{f'}$ für alle $f' \in U'$ keine Untergruppe G vom Typ π_G enthält, denn U' wird auf die offene Umgebung V von $x = \pi(f)$ abgebildet, die in diesem Fall in $M_k \setminus \overline{M(\pi_G)}$ liegen muß.

Dazu werde angenommen, daß $f' \in U$ existiert mit $G \leq \Gamma_{f'}$. Zu zeigen ist, daß der Isomphietyp von G auf den Nullstellen von f' nicht mit π_G übereinstimmen kann. O.E. kann man annehmen, daß $G = \mathcal{G}$ eine normierte Polyedergruppe ist. Wegen $G \leq \Gamma_{f'} \leq \Gamma_f$ bedeutet dies $f \in I_n(G)$. In Kapitel 3 wurde gezeigt, daß $I_n(G)$ aus disjunkten Vereinigungen linearer Räume in R_n^Δ besteht, wobei der Isomphietyp von G auf den Komponenten konstant ist. Die Fixpunktmenge von G in $U' \subset N$ ist linear, also in einer solchen Komponente enthalten. Der Isomphietyp von G ist also auf den Nullstellenmengen von f und f' gleich und nach der Voraussetzung über f von π_G verschieden.

b) Irreduzibilität von $\overline{M(\pi_G)}$:

Man betrachte die Restriktion der Quotientenabbildung

$$\pi : R_n^\Delta \longrightarrow M_k$$

auf die Invariantenräume $I_n(\pi_G)$. Letztere sind irreduzibel oder Vereinigungen von irreduziblen Komponenten. Im zweiten Fall operiert der Normalisator $\mathcal{N}(Q)$ transitiv auf diesen Komponenten, d.h. die Abbildung einer Komponente auf $\overline{M(\pi_G)}$ ist bereits surjektiv. Dies zeigt die Irreduzibilität.

c) $M(\pi_G)$ ist offen:

Die Mengen $\overline{M(\pi_G)}$, wo π_G die Erweiterungen von π_G durchläuft, bilden das Komplement von $M(\pi_G)$ in $\overline{M(\pi_G)}$. Weil nur endlich viele Erweiterungen möglich sind, zeigt dies die Behauptung.

d) Glattheit von $M(\pi_G)$:

Es sei $f \in \pi^{-1}(x)$, $x \in M(\pi_G)$. Mit den Bezeichnungen von Kapitel 6 gilt:

$\text{Fix } \Gamma_f$, die Fixpunktmenge von Γ_f in U' , ist linear (Schnitt eines linearen Teilraums von N mit U') und $\text{Fix } \Gamma_f$ besteht nach (6.7) genau aus den binären Formen von U' , die Γ_f als Isotropiegruppe besitzen. Wie in a) sieht man, daß auch der Isomorphietyp der Permutationsdarstellung von Γ_f auf $\text{Fix } \Gamma_f$ konstant ist. Also ist

$$\text{Fix } \Gamma_f \simeq (\text{Fix } \Gamma_f) / \Gamma_f \subset U' / \Gamma_f$$

das Urbild von $V/\Gamma \cap M(\pi_G) \subset M_k$.

Die Restriktion des étalen Morphismus

$$\phi/\Gamma: U' / \Gamma_f \longrightarrow V/\Gamma$$

auf $(\text{Fix } \Gamma_f) / \Gamma_f$ ist étale, das Bild also glatt.

e) Die Behauptung c) ist aufgrund der obigen Überlegungen klar. Die Darstellung von Γ_f hängt nach den Berechnungen von Kapitel 5 nur von π_G ab. Die Aussage c) entspricht etwa der "Faserbündelbedingung" für einen Äquisingularitätsbegriff bei Popp ([P], S.15)

f) Beweisalternative zu a)

Es bezeichne $(P_1^n)_\Delta = \{(x_1, \dots, x_n) \in P_1^n \mid x_i \text{ paarweise verschieden}\}$ und p ein Element der symmetrischen Gruppe S_n . Im folgenden wird

gezeigt, daß

$$X_p = \{x \in (P_1^n)_\Delta \mid \exists g \in PGL_2(k) \text{ mit } g_{x_i} = x_{p(i)}\}$$

abgeschlossen ist in $(P_1^n)_\Delta$.

Ist dann $\pi: G \hookrightarrow S_n$ eine Permutationsgruppe, so folgt, daß

$$X = \bigcap_{g \in G} X_{\pi(g)} = \{x \in (P_1^n)_\Delta \mid \pi: G \hookrightarrow S_n \text{ induziert lineare Permutationsgruppe auf } \{x_i\}_{i=1}^n\}$$

abgeschlossen ist. Das Bild von X in $(P_1^n)_\Delta / S_n$ ist abgeschlossen (man betrachte die Vereinigung der Mengen X , die zu allen Konjugierten von $\pi(G)$ gehören), saturiert bezüglich der $PGL_2(k)$ -Operation und enthält genau die Verzweigungsmengen von Kurven mit einer G -Aktion des Isomorphietyps von π . Dies zeigt die Behauptung.

Es bleibt die Abgeschlossenheit von X_p zu zeigen:

Man betrachte

$$\begin{array}{ccc} \Phi: (P_1^n)_\Delta & \longrightarrow & PGL_2(k) \times (P_1^n)_\Delta \\ \underline{x} & \longmapsto & (g, x) \end{array}$$

wobei g durch $g_{x_i} = x_{p(i)}$ für $i=1,2,3$ bestimmt ist.

$$M = \{(g, x) \in PGL_2(k) \times (P_1^n)_\Delta \mid g_{x_i} = x_{p(i)} \text{ für } i=1, \dots, n\}$$

ist abgeschlossen, also auch das Urbild X_p .

Lemma (7.2):-Sei f eine binäre Form mit der Isotropiegruppe Γ_f und

π_G der Isomorphietyp einer Untergruppe von Γ_f .

Dann ist das Urbild K von $\overline{M(\pi_G)} \cap V/\Gamma$ in U' bzgl. der Abbildung

$$U' \longrightarrow U'/\Gamma_f \xrightarrow{\phi/\Gamma} V/\Gamma \subset M_k$$

die Vereinigung aller Fixpunktmenngen von Untergruppen $G < \Gamma_f$, die auf der Nullstellenmenge von f eine Permutationsdarstellung vom Typ π_G induzieren

- K ist der Durchschnitt eines Kegels in N mit U' und Γ_f -saturiert. Die Restriktion von π/Γ auf K/Γ_f ist ein étaler Morphismus auf $\overline{M(\pi_G)} \cap V/\Gamma$.

Beweis:

a) Ergibt sich aus Teil a) des Beweises von (7.1).

b) Die Fixpunktmenge einer Untergruppe ist ein linearer Teilraum von N , die Vereinigung diese Fixpunktmenen also ein Kegel.

K ist Γ_f -saturiert: Sei $x \in K$ und x Fixpunkt von $G < \Gamma_f$. Dann ist $\bigvee x$ mit $\forall \Gamma_f$ Fixpunkt von $\bigvee G$ und der Isomorphietyp von $\bigvee G$ auf der Nullstellenmenge von f ist gleich dem von G .

Weil $\overline{M(\pi_G)}$ abgeschlossen ist und K/Γ_f das volle Urbild von $\overline{M(\pi_G)}$ ist, ist die Restriktion étale.

Definition (7.3): Die Mengen $M(\pi_G)$ werden im folgenden als Strata der Modulmannigfaltigkeit M_k bezeichnet.

Folgerung (7.4): Der Rand eines Stratum $M(\pi_G)$ ist die Vereinigung der Strata $M(\pi_{\overline{G}})$, wo $\pi_{\overline{G}}$ die möglichen Erweiterungen von π_G durchläuft.

Beweis:

Ergibt sich aus Folgerung (4.4) und Satz (7.1), a).

7.3 Beispiele - Die Umgebung des Modulpunkts der einzigen hyperelliptischen Kurve mit $A=S_4$ in den Fällen $g=2$ und $g=3$.

In den Fällen von $g=2$ und $g=3$ existiert nur eine Isomorphieklasse hyperelliptischer Kurven mit reduzierter Automorphismengruppe S_4 , der zugehörige Modulpunkt werde im folgenden mit x bezeichnet.

7.3.1 Die Lage des Modulpunkts der Kurve mit $A=S_4$ im Abschluß der Strata von Untergruppen in S_4 im Fall $g=2$

Die binäre Form

$$f = XY (X^4 - Y^4)$$

repräsentiert diese Isomorphieklasse im Fall $g=2$. Die Permutationsdarstellungen der Untergruppen auf der Nullstellenmenge O_6 findet man in 4.2.5. Die lineare Darstellung von $\Gamma_f=S_4$ auf dem Normalenraum ist die dreidimensionale Spiegelungsdarstellung ρ_3' (vgl. (5.12)), erzeugt von den Spiegelungen an den Diagonalebenen des Würfels.

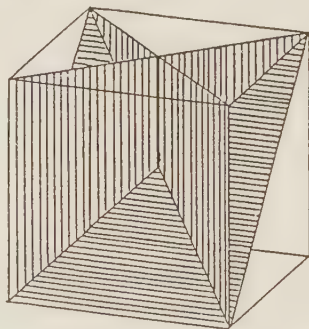
Bezeichnet man die Koordinatenfunktionen mit x, y, z so wird die Quotientenabbildung

$$N \longrightarrow N/\Gamma_f$$

durch $(x^2+y^2+z^2, x^4+y^4+z^4, xyz)$

gegeben (vgl. Anhang B, 3.)

(f werde als Ursprung des linearen Raums N aufgefaßt.)



Beschreibung der Fixpunkt mengen der Untergruppen von S_4 und ihrer Bilder in N/Γ_f :

- A_4, Z_4, D_4 und $V_4 \triangleleft S_4$ haben keine Fixpunkte in N , dies entspricht der Beobachtung, daß sie nicht als volle reduzierte Automorphismengruppen auftreten (vgl. (4.9)).
- Die zyklischen Gruppen der Ordnung 3 wirken als dreizähligen Drehungen um die Raumdiagonalen, die Diedergruppen enthalten zusätzlich die Spiegelungen an den Diagonalebenen, die eine solche Raumdiagonale enthalten. Die Fixpunktmenge ist also in beiden Fällen die Raumdiagonale. Das Bild der 4 Raumdiagonalen ist, weil S_4 transitiv auf ihnen operiert, die durch

$$(\lambda, \lambda, \lambda) \rightarrow (3\lambda^2, 3\lambda^4, \lambda^3)$$

parametrisierte Neil'sche Parabel.

Die Übereinstimmung der Fixpunkte von Z_3 und D_3 bedeutet, daß alle Kurven mit Z_3 eine Erweiterung zu D_3 zulassen (vgl. (4.9) bzw. [G], S.41).

- Die nicht-normalen Vierergruppen $V_4(1)$, erzeugt von einer zweizähligen Drehung um eine Koordinatenachse und einer Spiegelung an einer Diagonalebene, die diese Achse enthält, haben je eine Koordinatenachse als Fixpunktmenge. Das Bild der 3 Koordinatenachsen ist die durch

$$(\lambda, 0, 0) \longmapsto (\lambda^2, \lambda^4, 0)$$

parametrisierte glatte Kurve.

Die Involutionen vom Typ $Z_2(2)$ aus dem Normalteiler V_4 , also die zweizähligen Drehungen von S_4 , haben die gleiche Fixpunktmenge, d.h. sie treten nicht als volle reduzierte Automorphismengruppen auf (vgl. (4.9)).

- Die Spiegelungen vom Typ $Z_2(0)$ an den Diagonalebenen haben offensichtlich diese als Fixpunktmenge. Deren Bild im Quotienten N/Γ_f ist die durch

$$(\lambda, \mu, \nu) \longmapsto (\lambda^2+2\mu^4, \lambda^4+2\mu^4, \lambda\mu^2)$$

parametrisierte, singuläre, nichtnormale Fläche (vgl. 7.17)

Mit Lemma (7.2) erhält man:

Zusammenfassung:

Für Geschlecht 2 ist M_k glatt im Modulpunkt x der Kurven mit $A=S_4$.

x ist singulärer, nichtnormaler Punkt der Fläche $\overline{M(Z_2(0))}$. Diese

enthält die Kurven $\overline{M(D_3(0,0))}$ und $\overline{M(V_4(1))}$. x ist Spitze auf

$\overline{M(D_3(0,0))}$ und regulärer Punkt von $\overline{M(V_4(1))}$.

$\overline{M(Z_3(0))}$ und $\overline{M(Z_2(2))}$ stimmen mit $\overline{M(D_3(0,0))}$ und $\overline{M(V_4(1))}$ überein.)

7.3.2 Der étale Morphismus $N/\Gamma_f \supset U/\Gamma \longrightarrow M_k$ ist kein

Isomorphismus

Man betrachtet die Umgebung des Modulpunkts x der Kurvenklasse mit $A=S_4$ im Fall $g=3$. Diese wird repräsentiert durch die binäre Form

$$f = X^8 + 14 X^4 Y^4 + Y^8$$

(vgl. 3.3.2.d). Die Nullstellenmenge $M = T_0 \cup T_1$ (vgl. 3.2.1.4) besteht aus den Fixpunkten der dreizähligen Elemente von $A = \mathcal{S}_4$. Die Permutationsdarstellungen der Untergruppen von S_4 findet man in 4.2.5.

Bemerkenswert ist das Auftreten von je 2 S_4 -Konjugationsklassen von Untergruppen V_4 und Z_2 mit dem gleichen Isomorphietyp der Permutationsdarstellung. Die Fixpunkt mengen der beiden Klassen von Vierergruppen sollen im folgenden betrachtet werden. Die beiden Klassen haben die Repräsentanten

$$V_0 := \langle s^2: x \mapsto -x, t: x \mapsto x^{-1} \rangle \text{ und } V_1 := \langle s^2: x \mapsto -x, st: x \mapsto ix^{-1} \rangle$$

Die Darstellung ρ von $\Gamma_f = \mathcal{S}_4$ auf N ist $\rho_3^1 \oplus \rho_2$ (vgl. (5.12)), die zugehörige isotypische Zerlegung von N sei

$$N = W_3' \oplus W_2$$

Der Normalteiler V_0 hat auf W_3' nur den Fixpunkt $\{0\}$ und operiert trivial auf W_2 . Das Bild im Quotienten N/Γ_f ist nach (7.12.a) glatt.

Bei geeigneter Wahl der Basis $\{n_1, n_2, n_3\}$ von W_3' und $\{n_4, n_5\}$ von W_2 sind die Fixpunkt mengen von V_1 und der konjugierten Vierergruppen in W_3' die Koordinatenachsen und in W_2 die eindimensionalen Teilräume

$$\langle n_4 + \rho^i n_5 \rangle \quad (i \in \{0, 1, 2\}, \rho \neq 1, \rho^3 = 1).$$

Die Fixpunkt mengen der Konjugationsklasse von V_1 sind also Flächen in N .

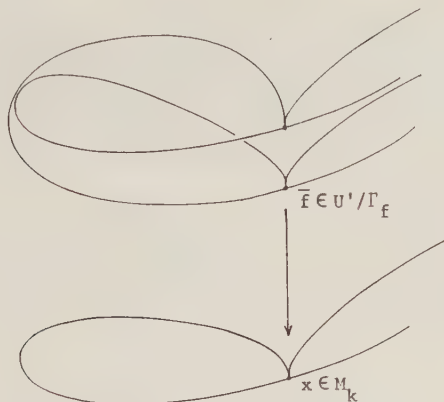
Deren Bild im Quotienten ist nach Satz (7.6) nicht normal, weil das Bild von $\langle n_4 + \rho^i n_5 \rangle$ im Quotienten $W_2/\rho_2(S_4)$ nicht normal ist (7.18).

$\bar{U} = U'/\Gamma_f$ enthält hier also zwei verschiedene irreduzible Flächen, eine davon glatt, die andere singular, die über der irreduziblen Menge $\overline{M(V_4(0))} \cap V/\Gamma$ liegen. Dies zeigt, daß die Abbildung

$$\phi/\Gamma : U'/\Gamma_f \rightarrow V/\Gamma \subset M_k$$

kein Isomorphismus ist.

Es liegt also etwa folgende Situation vor (gezeichnet für Kurven anstelle von Flächen):



Die beiden Komponenten des Urbilds von $\overline{M(V_4(0))} \cap V/\Gamma$ bilden eine zweiblättrige, unverzweigte Überlagerung von $\overline{M(V_4(0))} \cap V/\Gamma$. Explizit ergibt sich dies folgendermaßen:

Man bestimmt einen Normalenraum N zur Bahn Γ_f durch f:

$$N = W_3^1 \oplus W_2$$

$$= \langle n_1, n_2, n_3 \rangle \oplus \langle n_4, n_5 \rangle$$

mit $n_1 = XY^7 - 7X^5Y^3$, $n_2 = X^7Y - X^3Y^5$, $n_3 = X^6Y^2 - X^2Y^6$ und
 $n_4 = X^8 - 10X^4Y^4 + Y^8$, $n_5 = X^6Y^2 + X^2Y^6$.

Bezüglich dieser Basiswahl wird die Darstellung ρ von S_4 durch

$$\rho(s) = \begin{pmatrix} -i & & & \\ & i & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \\ & & & & -1 \end{pmatrix} \quad \rho(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & & -1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \quad \rho(w) = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -4i & 4i & -4i & & \\ -4i & 4i & 4i & & \\ -8 & -8 & 0 & & \\ & & & -4 & 8 \\ & & & -48 & -4 \end{pmatrix}$$

gegeben.

Die Fixpunktmenngen der beiden Repräsentanten der Konjugationsklassen von $V_4(0)$ sind dann:

$$F_0 := \text{Fix } V_0 = \{ f + \lambda(X^8 - 10X^4Y^4 + Y^8) + \mu(X^6Y^2 + X^2Y^6) \mid \lambda, \mu \in k \}$$

$$F_1 := \text{Fix } V_1 = \{ f + \lambda(X^8 - 10X^4Y^4 + Y^8) + \mu(X^6Y^2 - X^2Y^6) \mid \lambda, \mu \in k \}$$

Diese beiden Vierergruppen V_0, V_1 werden durch die achtzählige Drehung

$$\alpha_8: x \mapsto \xi x \quad (\text{ord } \alpha_8 = 8)$$

vertauscht. Die beiden Flächen F_0 und F_1 werden also durch α_8 involutorisch aufeinander abgebildet (involutorisch, weil das Quadrat α_8^2 beide Vierergruppen normalisiert.) Dies liefert eine Decktransformation der beiden Flächen über $\overline{M(V_4(0))}$ in U'/Γ_f . Explizit gilt für $F \in F_0$:

$$\alpha_8^2 F = \frac{1}{6}(-1+5\lambda) \left[f + \frac{7+\lambda}{5\lambda-1} (X^8 - 10X^4Y^4 + Y^8) + \frac{6i\mu}{5\lambda-1} (X^6X^2 - X^2Y^6) \right]$$

Weil $\alpha_8 \mathcal{Y}_4$ nicht normalisiert, kann f nicht Fixpunkt von α_8 sein, statt dessen ergibt sich

$$f' = \alpha_8 f = X^8 - 14X^4Y^4 + Y^8$$

Folgerung: f' ist ein Beispiel einer Form aus N , die nicht in

$U' \subset N$ enthalten sein kann, sonst wäre nach Folgerung

(6.7) $\Gamma_{f'} = \alpha_8 \mathcal{Y}_4 \neq \mathcal{Y}_4$ in $\Gamma_f = \mathcal{Y}_4$ enthalten.

Die Einschränkung der Aussagen von (6.5) bis (6.7) auf U bzw. U' ist also notwendig.

7.4 Singularitäten im Abschluß der Strata $M(\pi_G)$

In den Beispielen aus 7.3 sieht man, daß im Abschluß der Strata $M(\pi_G)$ also dann, wenn die Automorphismengruppe eines "längs $M(\pi_G)$ bewegten" Punktes degeneriert, Singularitäten auftreten können. Dies soll im folgenden in Abhängigkeit von der Gruppe G und der Erweiterung G untersucht werden. Das Werkzeug dazu liefert wie in 7.3 die Folgerung (7.2).

Die Ergebnisse werden zusammengefaßt in

Satz (7.5): Es sei $x \in M(\pi_G) \subset \overline{M(\pi_G)}$, also π_G eine Erweiterung von π_G , und $f \in \Gamma_n$ eine zugehörige binäre Form, $\Gamma_f = G$ also die Isotropiegruppe von f .

Folgende Fälle sind zu unterscheiden:

- a) Es existiere nur eine Konjugationsklasse von Untergruppen G' , die auf den Nullstellen von f vom Isomorphietyp $\pi_{G'}$ sind. Dann gilt:
 - a1) Wenn G' Normalteiler von Γ_f ist, sowie in den Fällen niedriger Kodimension aus a3), ist x normaler Punkt von $M(\pi_{G'})$
 - a2) x ist singulärer Punkt von $\overline{M(\pi_G)}$. Ausnahmen sind nur die Fälle von a3).
 - a3) In folgenden Fällen ist $\overline{M(\pi_G)}$ glatt in x .

G	π_G	$\pi_{G'}^{(1)}$	Bedingungen
V_4	$V_4(1)$	$Z_2(2)$	$g = 4$
D_r	$D_r(p, 0)$	$Z_r(p)$	$r = \frac{\bar{n}}{2}$ oder $\frac{\bar{n}}{4}$, $\bar{n} = n - p$, $p \in \{0; 2\}$
	$D_r(p, 1)$	$Z_r(p)$	$r = \frac{\bar{n}}{3}$ oder $\bar{n}$, "
	$D_{\bar{n}/2}(p, 0)$	$Z_{\bar{n}/4}(p)$	"
	$D_{\bar{n}}(p, 1)$	$Z_r(p)$	$r = \frac{\bar{n}}{2}$ oder $\frac{\bar{n}}{3}$, "
	$D_{\bar{n}}(p, 1)$	$D_{\bar{n}/2}(p, 0)$	"
	$D_r(p, 1)$	$D_{r/2}(p, 2)$	$r = \bar{n}$ oder $\frac{\bar{n}}{3}$, "

D_r	$D_{\bar{n}/2}(p,0)$	$D_{\bar{n}/4}(p,0)$	"
	$D_{\bar{n}}(p,1)$	$D_{\bar{n}/4}(p,2)$	"
A_4	A_4	$V_4(3)$	$g = 4$
S_4	S_4	A_4	$g < 16$ oder $g=18$
	S_4	$V_4(1)$	$g = 2$
¹⁾ $D_r(p,q)$ ist für $r=2$ die Vierergruppe $V_4(p:2+q)$			

- b) Wenn mehrere Konjugationsklassen vom Typ $\pi_{G'}$ in Γ_f enthalten sind (es treten maximal 3 auf), ist $\overline{M(\pi_{G'})}$ in einer Umgebung von x étales Bild einer reduziblen Mannigfaltigkeit mit der entsprechenden Zahl gleichdimensionaler Komponenten. Dies sind folgende Fälle:

G	π_G	$\pi_{G'}$	Bedingungen
D_r $r > 2$	$D_r(p,q)$	$D_r(p,q)$	Index gerade und $q \in \{0;2\}$
		$Z_2(q)$	r gerade und zwar für $q=2$: 2 Klassen von Nicht-Normalteilern sowie der Normalteiler $Z_2(p)$ falls $p=q$ für $q=1$: Der Normalteiler $Z_2(p)$ und eine Klasse von Nicht-Normalteilern
V_4	$V_4(i)$	$Z_2(j)$	mit $i=0$ bzw. 3 und $j=0$ bzw. 2 (2 Klassen)
	$V_4(i)$	$Z_2(j)$	mit $i=1$ bzw. 2 und $j=0$ bzw. 2 (2 Klassen)
S_4	S_4	$Z_2(i)$ $V_4(i)$	$n \equiv 8(24)$ oder $n \equiv 18(24)$ (i ist durch n bestimmt)

Beweis von (7.5):

Weil der étale Morphismus $\phi/\Gamma : U'/\Gamma_f \longrightarrow V \subset M_k$ und seine Restriktion auf die Urbilder von $\overline{M(\pi_G)} \cap V$ Singularität und Normalität erhalten, genügt es, nach Folgerung (7.2) die Vereinigungen der Fixpunktmenngen von Untergruppen des Isomorphietyps $\pi_{G'}$ in Γ_f und deren Bilder in U'/Γ_f zu untersuchen. Dazu dienen die folgenden

Abschnitte 7.4.1 bis 7.4.3.

Vorher soll noch Teil b) gezeigt werden:

Die Konjugationsklassen von Untergruppen des gleichen Isomorphietyps π_G , erhält man aus 4.2. Zu zeigen ist noch, daß das Urbild von Mengen $\overline{M(\pi_G)}$ in U'/Γ_f unter den Voraussetzungen von b) reduzibel ist:

Es sei

$$K = \bigcup_{i \in I} L_i \subset N$$

der Kegel aller Fixpunktmenngen von Untergruppen des Typs π_G , in Γ_f . Er zerfällt in lineare Teilräume L_i . Jeder Konjugationsklasse von Untergruppen des Typs π_G , entspricht eine Bahn in $\{L_i\}_{i \in I}$. Das Bild jeder solchen Bahn in U'/Γ_f ist irreduzibel. In den Bemerkungen (7.9) bis (7.11) wird gezeigt, daß die Fixpunktmenngen von zwei Untergruppen des Typs Γ_G , aus verschiedenen Konjugationsklassen paarweise verschieden und gleichdimensional sind. Die Bilder von zwei Bahnen können also nicht zusammenfallen, sie sind ferner von gleicher Dimension. (Die Gleichheit der Dimension ergibt sich bereits daraus, daß zwei Untergruppen des gleichen Isomorphietyps auch die gleiche lineare Darstellung auf N besitzen.)

7.4.1 Hilfssätze und Bezeichnungen

Satz (7.6): Es sei $V = U \oplus R$ ein k -Vektorraum, G eine endliche Gruppe, die linear auf V operiert und U, R stabile Komponenten. $H_1, \dots, H_k$ sei eine Konjugationsklasse von Untergruppen, $V_i = U_i \oplus R_i$ ($i=1, \dots, k$) die Fixpunktmenge von H_i .

Die Kegel

$$U_0 := \bigcup_{i=1}^k (U_i \oplus \{0\}) \quad \text{und} \quad V_0 := \bigcup_{i=1}^k V_i$$

sind saturiert und es gilt:

Ist U_0/G singulär (bzw. nicht normal), so ist auch V_0/G singulär (bzw. nicht normal).

Zum Beweis dient:

Lemma (7.7): Sind X, Y affine, algebraische, irreduzible Mannigfaltigkeiten, Y normal, $X \subset Y$ abgeschlossen und Retrakt von Y , so ist auch X normal.

Beweis von (7.7):

Es seien $e: X \hookrightarrow Y$ (abgeschlossen),
 $p: Y \longrightarrow X$

Morphismen und $p \circ e = \text{id}_X$. Diese induzieren

$$p^*: k[X] \subset k[Y]$$

$$e^*: k[Y] \longrightarrow k[X]$$

Im folgenden werde $e(X)$ mit X und $p^*(k[X])$ mit $k[X]$ identifiziert.

Es sei $x \in X$, $\mathcal{O}_x(X)$ und $\mathcal{O}_x(Y)$ bezeichne die lokalen Ringe von x .

Es wird $\mathcal{O}_x(X) = k(X) \cap \mathcal{O}_x(Y)$ gezeigt.

Die Inklusion " $\subset$ " ist trivial. Sei $\phi \in k(X) \cap \mathcal{O}_x(Y)$. Dann ist

$$\phi = f g^{-1} = f' g'^{-1}, \quad f, g \in k[X], \quad f', g' \in k[Y], \quad g'(x) \neq 0.$$

Es gilt

$$f g' - g f' = 0$$

also auch

$$f \bar{g} - g \bar{f} = 0$$

für die Restriktionen $\bar{g} = e^*(g')$ und $\bar{f} = e^*(f')$. Aus $g'(x) \neq 0$ folgt $\bar{g}(x) \neq 0$. Dies zeigt

$$\phi = \frac{f}{g} \in \mathcal{O}_x(X)$$

Beweis von Satz (7.6):

Es bezeichne

$$R_0 = \bigcup_{i=1}^k \{0\} \oplus R_i$$

Die Projektionen auf U und R und die natürlichen Einbettungen dieser Summanden induzieren Morphismen

$$\begin{aligned} p_U: V_0 &\longrightarrow U_0 & , & & p_V: V_0 &\longrightarrow R_0 \quad (\text{surjektiv}) \\ e_U: U_0 &\hookrightarrow V_0 & , & & e_R: R_0 &\hookrightarrow V_0 \quad (\text{abgeschlossen}) \end{aligned}$$

$$\text{mit } p_U \circ e_U = \text{id}_{U_0}, p_R \circ e_R = \text{id}_{R_0} \quad \text{und} \quad p_R \circ e_U = p_U \circ e_R = 0$$

Der Übergang auf die Quotienten nach G führt zu Morphismen $\bar{p}_U, \bar{p}_R, \bar{e}_U, \bar{e}_R$ mit entsprechenden Relationen. Dies zeigt, daß Lemma (7.7) für V_0/G und U_0/G anwendbar ist, die Behauptung für die Normalität ist also gezeigt. Der Übergang zu den Tangentialräumen in der Bildern der 0 liefert:

$$\begin{aligned} dp_U: T_0(V_0/G) &\longrightarrow T_0(U_0/G) & dp_R: T_0(V_0/G) &\longrightarrow T_0(R_0/G) \\ de_U: T_0(U_0/G) &\longrightarrow T_0(V_0/G) & de_R: T_0(R_0/G) &\longrightarrow T_0(V_0/G) \end{aligned}$$

$$\text{mit } d\bar{p}_U d\bar{e}_U = \text{id} \text{ und } d\bar{p}_R d\bar{e}_R = \text{id} \text{ und } d\bar{p}_U d\bar{e}_R = d\bar{p}_R d\bar{e}_U = 0.$$

Die Tangentialräume $T_0(U_0/G)$ und $T_0(R_0/G)$ sind also direkte Summanden von $T_0(V_0/G)$. Daraus folgt die Behauptung für die Singularität.

Satz (7.8): Mit den Bezeichnungen von Satz(7.6) gilt:

Die Quotientenabbildungen und natürlichen Inklusionen des Diagramms

$$\begin{array}{ccccc} V_i & \hookrightarrow & V_0 & \hookrightarrow & V \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & V_0/G & \hookrightarrow & V/G \end{array}$$

induzieren eine Monomorphismus ϕ von $k[V_0/G]$ in $k[V_i]$. $k[V/G]$ und $k[V_i]$ tragen in natürlicher Weise die Graduierung von $k[V]$, diese ist mit ϕ verträglich.

Beweis:

$I(V_0)$ und $I(V_i)$ ($i=1, \dots, k$) bezeichne die zu V_0 und V_i in $k[V]$ gehörigen Ideale.

ϕ ist monomorph, weil für $f \in k[V]^G$ gilt

$$\begin{aligned} f \in I(V_i) &\Rightarrow f \in I(V_j) \quad \text{für alle } j \in \{1, \dots, k\} \\ &\Rightarrow f \in I(V_0) \end{aligned}$$

Dies ergibt sich aus der Transitivität der Operation von G auf den V_i . Die V_i sind lineare Räume, $I(V_i)$ ist also ein homogenes Ideal, das von Linearformen erzeugt wird, so daß die Graduierung von $k[V]$ auf $k[V]/I(V_i)$ übertragen wird.

Durch Übergang zu den entsprechenden Algebrendiagrammen sieht man, daß man den Invariantenring von V_0/G aufgrund des obigen Ergebnisses bis auf Isomorphie durch Restriktion der Invarianten von V/G auf einen der Räume V_i erhält.

In den folgenden beiden Abschnitten werden die hier aufgeführten Bezeichnungen benutzt:

Bezeichnungen:

- Ist V ein Vektorraum und H eine Gruppe, die linear auf V operiert, so bezeichne V^H die Menge der Fixpunkte von H in V .
- Wenn $\{\rho_i\}_{i \in I}$ die irreduziblen Darstellungen einer endlichen Gruppe sind, so bezeichne

$$N = \bigoplus_{i \in I} N_i$$

die isotypische Zerlegung von N .

W_i ($i \in I$) bezeichne einen Vektorraum mit der irreduziblen Darstellung ρ_i .

7.4.2 Die Normalteiler von Γ_f - Zum Beweis von (7.5), Teil a

Mit den Bezeichnungen von (7.5) und 7.4.1 gilt:

Ist G' Normalteiler von $G=\Gamma_f$, so ist $N^{G'}$ ein Γ_f -stabiler Unterraum von N und das Bild im Quotienten N/Γ_f ist normal ([K2], S.106).

Es ist isomorph zu $N^{G'}/\Gamma_f$ und die Singularitäten können wie beim Satz von Fischer-Igusa durch Abzählen der Eigenwerte festgestellt werden.

$$7.4.2.1 \quad \pi_G = \mathbb{Z}_r(p) \quad (n = rs + p, p \in \{0, 1, 2\})$$

Es sei $G = \langle \alpha \rangle$ und ξ eine primitive r -te Einheitswurzel. Auf den Summanden der isotypischen Zerlegung

$$N = \bigoplus_{i=0}^{r-1} N_i$$

hat α die Darstellung

$$\alpha|_{N_i} = \xi^i \cdot \text{Id}_{N_i}$$

Es sei $G' = \langle \alpha^m \rangle$ ($r'm=r$, $2 \leq m < r$). Dann ist

$$N^{G'} = \bigoplus_{\mu=0}^{m-1} N_{\mu r'}$$

Die Elemente α^j ($j=1, \dots, m-1$) haben auf $N_{r'}$ und $N_{(m-1)r'}$ gemäß (5.5) die s -fachen Eigenwerte $\xi^{jr'}$ bzw. $\xi^{-jr'}$, können also nur dann Spiegelungen auf $N^{G'}$ sein, wenn $s=1$ und $m-1=1$ ist. In diesem Fall ist

$$\pi_G = \mathbb{Z}_{\bar{n}}(p)$$

$\mathbb{Z}_{\bar{n}}(p)$ tritt als Isotropiegruppe nur auf, wenn $p=1$ und $\bar{n}=n-p$, also ungerade ist (vgl. (4.9)). In diesem Fall ist G' vom Index 2 unmöglich.

$N^{G'}/\Gamma_f$ ist also für $G=\mathbb{Z}_r$ nie glatt.

$$7.4.2.2 \quad \pi_G = V_4(i) \quad (i=1, 2, 3, 4)$$

N hat die isotypische Zerlegung

$$N = N_o \oplus N_s \oplus N_t \oplus N_u \quad (V_4 = \{1, s, t, u\})$$

Es gilt

$$N^{G'} = N_o \oplus N_\alpha \quad \text{für } G' = \langle \alpha \rangle, \alpha \in V_4$$

Die beiden von α verschiedenen Involutionen induzieren auf N_α die

Involution $-1 \cdot \text{Id}$. Sie sind also genau dann Spiegelungen, wenn

$$\dim N_{\alpha} = 1$$

ist.

Der Vergleich mit Lemma (5.10) zeigt, daß dies in folgenden Fällen eintritt:

π_G	$\pi_{G'}$	g	
$V_4(0)$	$Z_2(0)$	3	drei Konjugationsklassen
$V_4(3)$			tritt nicht als Isotropiegruppe auf
$V_4(1)$	$Z_2(0)$	2	zwei Konjugationsklassen
	$Z_2(2)$	4	eine Konjugationsklasse *)
$V_4(2)$	$Z_2(0)$		für kein Geschlecht $\dim N_{\alpha}=1$
	$Z_2(2)$	3	zwei Konjugationsklassen

*) liefert den einzigen Fall mit $G=V_4$ in Satz (7.5), a.

Bemerkung (7.9): Man sieht bei den obigen Überlegungen, daß $N^{G'}$ bei Untergruppen gleichen Isomorphietyps jeweils gleichdimensional, aber paarweise verschieden ist.

$$7.4.2.3 \quad \pi_G = D_r(p, q) \quad (n=rs+p, p \in \{0, 2\}, q \in \{0, 1, 2\})$$

Normalteiler sind die Untergruppen

$$Z_k \triangleleft Z_r \triangleleft D_r \quad (km=r, 2 \leq k < r)$$

sowie die beiden Untergruppen D_k ($k = \frac{r}{2}$) vom Index 2. Für den Beweis von Satz (7.5), b werden zunächst die Fixpunktmenngen aller Untergruppen D_r bestimmt.

Es sei wie bisher $D_r = \langle \alpha, t \rangle$; die Untergruppen Z_k werden von α^m erzeugt und für jeden Index m seien die zu D_k isomorphen Untergruppen folgendermaßen bezeichnet:

$$D_k^j := \langle \alpha^m, \alpha^j t \rangle \quad (j=0, \dots, m-1)$$

N hat die isotypische Zerlegung

$$N = \bigoplus_{1 \leq i < \frac{r}{2}} N_i \oplus N_{00} \oplus N_{01} \oplus \underbrace{N_{10} \oplus N_{11}}_{\text{falls } r \equiv 0(2)}$$

Die Restriktion von α, t auf die irreduziblen Summanden W_i ($1 \leq i < \frac{r}{2}$), W_{ij} ($i, j \in \{0;1\}$) liefert die Darstellungen

$$\alpha|_{W_i} = \begin{pmatrix} \xi^i & 0 \\ 0 & \xi^{-i} \end{pmatrix} \quad t|_{W_i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(mit einer primitiven r -ten Einheitswurzel ξ)

bzw.

$$\alpha|_{W_{ij}} = (-1)^i \quad t|_{W_{ij}} = (-1)^j$$

Somit ist

$$N^{<\alpha^m>} = \bigoplus_{1 \leq \mu < \frac{m}{2}} N_{\mu k} \oplus N_{01} \oplus N_{00} \oplus \underbrace{N_{10} \oplus N_{11}}_{\text{falls } m \equiv 0(2)}$$

Die Fixpunkte von α^j in W_i ($j=0, \dots, m-1$) sind offensichtlich

$$v_{ji} := \langle e_1 + \xi^{ji} e_2 \rangle \quad (e_1, e_2 \text{ sei geeignete Basis}).$$

$\alpha^j t$ operiert auf W_{01} nie trivial, auf W_{10} bzw. W_{11} genau dann, wenn $j \equiv 0(2)$ bzw. $j \equiv 1(2)$. Dies ergibt unter Beachtung von (5.9)

$$\dim N^{D_k^i} = \begin{cases} \dim N_{00} + s(\frac{m}{2} - 1) + \dim N_{10} & , \quad m \equiv 0(2), i \equiv 0(2) \\ \dim N_{00} + s(\frac{m}{2} - 1) + \dim N_{11} & , \quad m \equiv 0(2), i \equiv 1(2) \\ \dim N_{00} + s \frac{m-1}{2} & , \quad m \equiv 1(2) \end{cases}$$

Bemerkung (7.10):

- Zum Beweis von Satz (7.5), b interessieren nur die Fälle von geradem Index mit $q \in \{0;2\}$, weil nur in diesen Fällen nichtkonjugierte Untergruppen vom gleichen Isomorphietyp auftreten. Man sieht aus den obigen Überlegungen, daß sich die Fixpunktmenngen der Klassen D_k^i ($i \equiv 0(2)$) und D_k^i ($i \equiv 1(2)$) um die Summanden N_{10} bzw. N_{11} unterscheiden, die nie trivial sein können. Die Dimensionen stimmen überein, weil gemäß (5.9) $\dim N_{10} = \dim N_{11}$ für $q \in \{0;2\}$ gilt.
- Die Dimensionen der Fixpunktmenngen der Involutionen gleichen Isomorphietyps ergibt sich aus Folgerung (5.5). Anhand der obigen Überlegungen sieht man, daß die Fixpunktmenngen von Involutionen verschiedener Konjugationsklassen (im Fall $r \neq 1(2)$) verschieden sind:

$$N^{<\alpha^{\frac{r}{2}}>} = \bigoplus_{1 \leq \mu < \frac{r}{4}} N_{\mu 2} \oplus N_{00} \oplus N_{01} \oplus \underbrace{N_{10} \oplus N_{11}}_{r \equiv 0(4)}$$

$$N^{<\alpha^j t>} = \bigoplus_{1 \leq i < \frac{r}{2}}^{d_i} \left(\bigoplus_{v=1}^{d_i} V_{ji} \right) \oplus N_{00} \oplus N_{10}, \quad j \equiv 0(2)$$

$$N^{<\alpha^j t>} = \bigoplus_{1 \leq i < \frac{r}{2}}^{d_i} \left(\bigoplus_{v=1}^{d_i} V_{ji} \right) \oplus N_{00} \oplus N_{11}, \quad j \equiv 1(2)$$

(d_i bezeichne die Anzahl der Summanden W_i von N_i .)

Jetzt sollen die Fixpunkt Mengen der Normalteiler G' von Γ_f betrachtet werden:

$$a) \underline{G'} = \underline{Z_k}: N^{G'} = \bigoplus_{1 \leq \mu < \frac{m}{2}} N_{\mu k} \oplus N_{00} \oplus N_{01} \oplus \underbrace{N_{10} \oplus N_{11}}_{\text{falls } m \equiv 0(2)}$$

Drei Fälle werden unterschieden:

- $m > 3$: Mindestens ein Summand W_k tritt auf ($\mu = 1$ und Vielfachheit von $\rho_k = s \geq 1$ gemäß (5.9).) Die Elemente α^i ($i=1, \dots, m-1$) von G haben dort die Eigenwerte $\xi^{\pm i k} \neq 1$, wirken also nicht als Spiegelungen, α^m operiert trivial. Die Involutionen $\alpha^i t$ haben auf jedem Summanden mit irreduzibler zweidimensionaler Darstellung einen Eigenwert -1. Die Anzahl dieser Summanden ist für $m \geq 5$ oder $s \geq 2$ größer als zwei. Im Fall $m=4$ und $s=1$ tritt ein solcher Summand auf, ferner hat αt und damit die Konjugationsklasse einen weiteren Eigenwert -1 in N_{10} . Die Involutionen der Konjugationsklasse von t erzeugen G nicht. Es bleibt der Fall $m=3$ und $s=1$:

Hier ist $N^{G'} = W_3$
und $N^{G'}/G$ ist glatt.

$$- m = 2: N^{G'} = N_{00} \oplus N_{01} \oplus N_{10} \oplus N_{11}$$

G operiert darauf als Vierergruppe, die Zahlen der Eigenwerte -1 sind

$$\text{für } : \dim N_{10} \oplus N_{11} = s$$

$$\text{für } t : \dim N_{11} \oplus N_{01} = \begin{cases} s-1, & q=0 \\ s, & q=1, 2 \end{cases}$$

$$\text{für } : \dim N_{10} \oplus N_{01} = \begin{cases} s-1 & q=0, 1 \\ s & q=2 \end{cases}$$

D.h. G wird also auf $N^{G'}$ genau dann von Spiegelungen erzeugt, wenn $s=1$ (also $q=1$) ist oder wenn $s=2$ und $q=0$ ist.

$$- m=1 : \quad N^{G'} = N_{01} \oplus N_{00}$$

G operiert darauf als Involution. Der Quotient ist genau dann glatt, wenn $\dim N_{01} \leq 1$ ist:

$q=0$ und $s \leq 4$; $q=1$ und $s \leq 3$ (Die Fälle $q=2$ und $s \leq 2$ ergeben keine Isotropiegruppen, vgl. (4.9))

Dies ergibt die Fälle von (7.5).a mit $G=D_r$ und $G'=Z_k$.

$$b) \underline{G' = D_{r/2}}:$$

$$\text{Es ist } N^{<\alpha^2, t>} = N_{10} \oplus N_{00} \text{ und } N^{<\alpha^2, \alpha t>} = N_{11} \oplus N_{00}.$$

G operiert darauf als Involution und die Dimensionen von N_{10} bzw. N_{11} geben die Vielfachheiten der Eigenwerte (-1) an. Bei der Bestimmung des Isomorphietyps von $G' = \langle \alpha^2, \alpha^i t \rangle$ ist im Fall $q=1$ die Voraussetzung von (5.9) zu beachten, daß t in der Verzweigungsmenge M fixpunktfrei sein soll.

Man erhält :

$N^{G'}/G$ ist genau in folgenden Fällen glatt:

π_G	$\pi_{G'}$	
$D_{\bar{n}}(p,1)$	$D_{\bar{n}/2}(p,0)$	
$D_k(p,1)$	$D_{k/2}(p,2)$	$k=\bar{n}$ oder $\bar{n}/3$
$D_{\bar{n}/2}(p,q)$	$D_{\bar{n}/4}(p,q)$	$q=2$ tritt bei Isotropiegruppen hier nicht auf

Damit erhält man die Fälle mit $G=D_r$ und $G'=D_{r/2}$ von (7.5).a

7.4.2.4 $G = A_4$

Die isotypische Zerlegung von N ist

$$N = N_3 \oplus N_1 \oplus \bar{N}_1 \oplus N_0$$

$V_4 \triangleleft A_4$ hat in der dreidimensionalen Darstellung nur den Fixpunkt 0, auf den Summanden zur eindimensionalen Darstellung operiert V_4 trivial.:

$$N^{V_4} = N_1 \oplus \bar{N}_1 \oplus N_0$$

Auf N_1 bzw. $\bar{N}_1$ hat A_4 dritte Einheitswurzeln als Eigenwert. Lemma (5.11) zeigt, daß $\dim N_1 + \bar{N}_1 \leq 1$ nur für $g=2$ oder $g=4$ erfüllt ist. Im Fall $g=2$ ist A_4 nicht die volle Isotropiegruppe. Im Fall

$g=4$ entnimmt man die Permutationsdarstellung $V_4(3)$ aus 4.2.4.

7.4.2.5 $G = S_4$

a) $G' = A_4$

Es ist $N^{G'} = N_1 \oplus N_0$, weil A_4 in den höherdimensionalen Darstellungen nur den Fixpunkt 0 besitzt.

$$\dim N_1 \leq 1$$

gilt genau für $g \leq 15$ und $g = 18$ (vgl. (5.12)).

b) $G' = V_4$, normal in $G=S_4$.

V_4 hat in den beiden dreidimensionalen Darstellungen nur den Fixpunkt 0 und ist Kern der zweidimensionalen Darstellung:

$$N^{G'} = N_2 \oplus N_1 \oplus N_0$$

Die Involutionen von $S_4 \setminus V_4$ haben mindestens je einen Eigenwert -1 in N_1 und N_2 sobald $\dim N_2 \leq 2$ und $\dim N_1 \leq 1$ ist. Dies tritt ein, wenn $g \neq 3; 6$ ist. In diesen Fällen entfällt der Summand N_1 und G wird auf $N^{G'}$ von Spiegelungen erzeugt.

Bemerkung (7.11):

In den Fällen $n \equiv 8(24)$ und $n \equiv 18(24)$ ist für den Beweis von (7.5).b zu zeigen, daß die Fixpunktmenge von Vierergruppen und zyklischen Gruppen Z_2 aus verschiedenen Konjugationsklassen nicht übereinstimmen können. Dies ergibt sich aus den obigen Überlegungen, weil die Gruppen Z_2 und V_4 , die in A_4 liegen, auf $N_2 \oplus N_1$ trivial, die anderen aber nicht-trivial operieren.

7.4.3 Die Nicht-Normalteiler von Γ_f - Zum Beweis von (7.5)

Wenn G' nicht normal ist in $G = \Gamma_f$, genügt es nicht, die Fixpunktmenge $N^{G'}$ zu bestimmen, weil G auf $N^{G'}$ nicht operiert. Wie in Lemma (7.2) gezeigt wurde, ist das Urbild von $\overline{M(\pi_{G'})} \cap V$ in der Situation von Satz (7.5), a) die Vereinigung der Fixpunkt Mengen aller Konjugierten von G' :

$$N_0 := \bigcup_{\gamma \in G} N^{\gamma G'}$$

N_0 ist saturiert und N_0/G ist das Urbild von $\overline{M(\pi_{G'})} \cap V$ in N/G . Zur Untersuchung von N_0/G dient Satz (7.6).

7.4.3.1 $\pi_G = D_r(p, q)$ ($n = rs+p$, $p \in \{0; 2\}$, $q \in \{0; 1; 2\}$)

Lemma (7.12): a) Auf $V = \mathbb{A}^2$ operiere die Diedergruppe G , die bezüglich der Basis e_1, e_2 die Darstellung

$$\alpha = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho^{-1} \end{pmatrix}, \quad t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ord } \rho = a$$

hat. Bei entsprechender Wahl der Koordinatenfunktionen erhält man den Invariantenring

$$k[x, y]^{<\alpha, t>} = k[xy, x^a y^a].$$

b) $\phi: V \longrightarrow V/G$ bezeichne die Quotientenabbildung und $W_0 := \langle e_1 + e_2 \rangle$, $W_1 := \langle e_1 + \rho e_2 \rangle$ die Fixpunkt Mengen von t und αt . Dann ist

$$k[\phi(W_1)] \simeq k[\phi(W_0)] \simeq k[s^2, s^a] \text{ (mit } k[W_0] \simeq k[W_1] \simeq k[s])$$

Beweis:

a) ist klar, b) ergibt sich aus Satz (7.8).

Lemma (7.13): Es sei $V = \mathbb{A}^4$, $k[V] = k[u_1, u_2, v_1, v_2]$ und bezüglich der entsprechend gewählten Basis e_1, e_2, f_1, f_2 sei die Operation der Diedergruppe G durch

$$\alpha = \begin{pmatrix} \rho^2 & 0 & & \\ 0 & \rho^{-2} & & \\ & & \rho^3 & 0 \\ 0 & & 0 & \rho^{-3} \end{pmatrix}, \quad t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

($\text{ord } \rho = 2^k$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$)
gegeben. Es sei $W_0 := V^{<t>}$, $W_1 = V^{<\alpha t>}$ und

$$\phi: V \longrightarrow V/G$$

die Quotientenabbildung. Dann sind die Bilder

$$\phi(W_0), \phi(W_1)$$

nicht normal.

Beweis:

Es sei p mit $3p \equiv 2(2^k)$ gewählt. Man erhält Invarianten

$$u_1 u_2, v_1 v_2, v_1^{p u_2 + v_2^p} u_1.$$

Die Restriktion auf $W_0 = \langle e_1 + e_2, f_1 + f_2 \rangle$ mit $k[W_0] = k[s, t]$

liefert $s^2, t^2, st^p \in k[\phi(W_0)]$

($k[\phi(W_0)]$ gemäß (7.8) mit seinem Bild in $k[s, t]$ identifiziert).

Weil p gerade ist, gilt

$$s \in k(\phi(W_0)).$$

Weil keine linearen Invarianten in $k[V/G]$ existieren, muß

$$s \notin k[\phi(W_0)]$$

sein, s ist aber ganz über $k[\phi(W_0)]$. Die Behauptung für $\phi(W_2)$ ergibt sich ähnlich.

Lemma (7.14): Es sei $V = \mathbb{A}^4$, $k[V] = k[u, v, w, t]$ und bezüglich der

Basis e_1, e_2, e_3, e_4 sei $G = D_4$ durch

$$\alpha = \begin{pmatrix} i & & & \\ & -i & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \quad t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

gegeben. (Dies ist die direkte Summe $\rho_1 \oplus \rho_{10} \oplus \rho_{11}$)

Es sei $W_0 = V^{\langle t \rangle}$, $W_1 = V^{\langle \alpha t \rangle}$ und

$$\phi: V \longrightarrow V/G$$

die Quotientenabbildung. Dann sind die Bilder

$$\phi(W_0), \phi(W_1) \text{ nicht normal.}$$

Beweis:

Man erhält die Invarianten $(u^2 + v^2)w$, $(u^2 - v^2)t$, w^2 , t^2 , uv .

Die Restriktion auf $W_0 = \langle e_1 + e_2, e_3 \rangle$ mit $k[W_0] = k[\lambda, \mu]$ liefert

$\lambda^2 \mu$, μ^2 , $\lambda^2 \in k[\phi(W_0)]$ ($k[\phi(W_0)]$ wieder gemäß (7.8) mit seinem Bild in $k[W_0]$ identifiziert, dabei verschwinden die Invarianten $(u^2 - v^2)t$ und t^2). Man sieht ähnlich wie im Beweis von (7.13), daß $k[\phi(W_0)]$ nicht ganz abgeschlossen ist. Der Beweis für W_1 verläuft analog.

Man betrachte jetzt die nicht normalen Untergruppen G' von $\Gamma_f = G = D_r$

- a) Es sei $G' = D_k$ (D_k vom Index m in D_r , $m \geq 3$, $k \geq 2$, D_2 bedeutet eine Vierergruppe)

Die Bezeichnungen von 7.4.2.3 werden übernommen. Man betrachtet jetzt die Vereinigung N_O der Fixpunktmenngen einer Konjugationsklasse von Untergruppen der Isomorphieklasse G' . Gezeigt wird:

N_O/G ist nicht normal mit der Ausnahme

$$\pi_G = D_{\bar{n}}(p,1) \text{ und } \pi_{G'} = D_{\bar{n}/4}(p,2)$$

Zum Beweis beschränkt man sich gemäß (7.6) auf einen geeigneten Summanden U von N . (Bezeichnungen wie in (7.6).)

- a1) Der Index m sei keine 2-Potenz ($m = m' \cdot 2^j$, m' ungerade)

Man bestimmt einen irreduziblen zweidimensionalen Summanden U von N auf dem α^m trivial und α mit ungerader Ordnung operiert. Lemma (7.12) zeigt in diesem Fall, daß die Vereinigung U_O der Fixpunktmenngen jeder Konjugationsklasse von Untergruppen D_k ein nicht normales Bild $\phi(U_O)$ hat. Dazu wählt man $k' = 2^j k$ und U als irreduziblen Summanden von $N_{k'}$. Dies ist möglich, weil wegen

$$k \geq 2 \quad \text{und} \quad 2^j k = \frac{r}{m'} < \frac{r}{2}$$

$$2 \leq k' < \frac{r}{2}$$

gilt, und die Vielfachheit der irreduziblen Summanden von $N_{k'}$, $s \geq 1$ ist.

- a2) Der Index m sei eine 2-Potenz, $m > 6$

Wegen $2 \leq 3k < \frac{km}{2} = \frac{r}{2}$ enthält N die Summanden N_{2k} und N_{3k} .

Man betrachte

$$U = W_{2k} \oplus W_{3k}$$

die Summe von je einem irreduziblen Summanden. α^m operiert auf U trivial und α hat auf U die Darstellung von Lemma (7.13).

Dies zeigt, daß $\phi(U_O)$ nicht normal ist.

- a3) Der Index m sei 4 und $s = \frac{n-p}{r} \geq 2$

Wähle $U = W_k \oplus W_{10} \oplus W_{11}$, mit irreduziblen Summanden W_k, W_{10}, W_{11} von N_k, N_{10}, N_{11} . (Diese Summanden treten wegen $s \geq 2$ auf.)

Lemma (7.14) zeigt, daß $\phi(U_O)$ nicht normal ist.

a4) Der Index m sei 4 und s=1 also $\pi_G = D_{\bar{n}}(p,1)$

$$\text{Wähle } U := N^{\langle \alpha^4 \rangle} = N_{r/4} \oplus N_{10} = W_{r/4} \oplus W_{10}$$

(Wegen $s=1$ bestehen $N_{r/4}$ und N_{10} aus genau einem irreduziblen Summanden. Eine Ausnahme würde der Fall $\frac{r}{4} = 1$ bilden, dies führt zu $\pi_G = D_4(2,1)$ und $n=6$. In diesem Fall tritt $D_4(2,1)$ aber nicht als Isotropiegruppe auf.)

G hat auf U die Darstellung

$$\alpha|_U = \begin{pmatrix} i & & \\ & -i & \\ & & -1 \end{pmatrix} \quad \tau|_U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ 1 & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{und es ist } U^{\langle \alpha^4, \tau \rangle} = \langle e_1 + e_2, e_3 \rangle, \quad U^{\langle \alpha^4, \alpha \tau \rangle} = \langle e_1 + ie_2 \rangle.$$

Der Invariantenring von G in $k[U] = k[x, y, z]$ ist

$$k[x^4 + y^4, xy, (x^2 + y^2)z, z^2]$$

(vgl. Anhang B, 2.).

Die Restriktion der Invarianten auf $U^{\langle \alpha^4, \tau \rangle}$ liefert die nicht-normale Varietät

$$U/G \cong \text{Sp } m \text{ } k[\lambda^2, \mu^2, \lambda^2 \mu]$$

(U_0 Vereinigung der Fixpunktmenzen der Konjugationsklasse von $\langle \alpha^4, \tau \rangle$, $k[U_0/G]$ eingebettet in

$$k[U^{\langle \alpha^4, \tau \rangle}] = k[\lambda, \mu] \quad)$$

$\langle \alpha^4, \tau \rangle$ hat eine Permutationsdarstellung von Isomorphietyp $D_{\bar{n}/4}(p,0)$ weil τ in Lemma (5.9) ohne Fixpunkte in M gewählt wurde, und weil nach 4.2.2 nur die Isomorphietypen $D_{\bar{n}/4}(p,q)$ mit $q \in \{0;2\}$ auftreten.

Die Restriktion der Invarianten auf $U^{\langle \alpha^4, \alpha \tau \rangle}$ liefert

$$U/G \cong \text{Sp } m \text{ } k[\lambda^2].$$

(U_0 Vereinigung der Fixpunktmenzen der Konjugationsklasse von $\langle \alpha^4, \alpha \tau \rangle$, $k[U_0/G]$ eingebettet in

$$k[U^{\langle \alpha^4, \alpha \tau \rangle}] = k[\lambda] \quad)$$

Weil $N^{\langle \alpha^4, \alpha \tau \rangle}$ ganz in U enthalten ist, ist mit U_0/G auch N_0/G (N_0 Vereinigung der Fixpunktmenzen der Konjugierten von $\langle \alpha^4, \alpha \tau \rangle$ in N.) glatt. Dies ist der einzige Ausnahmefall eines normalen Bildes N_0/G .

b) Es sei $G' = \mathbb{Z}_2$ $(\mathbb{Z}_2 \mid G = D_r)$

Wenn man $k=1$ und $m=r$ setzt, ergibt sich dieselbe Argumentation wie in den obigen Fällen a1), a2), a3).

Im Fall a1) ist zu beachten, daß statt der Ungleichung

$$2 \leq k < \frac{r}{2} \quad \text{nur noch}$$

$$1 \leq 2^j < \frac{r}{2} \quad \text{gilt.}$$

Kritisch für das Auftreten des Summanden N_k , ist aber nur der Fall $j=0$ (r ungerade) und $s=1$. Dies ist aber nicht gleichzeitig möglich. ($s=1 \Rightarrow r$ gerade).

Der verbleibende Fall a4) führt hier zu $\pi_{G=D_4}(p,1)$ und $g=2$. $D_4(p,1)$ tritt aber nicht als Isotropiegruppe auf.

Im Fall der Nicht-Normalteiler $\mathbb{Z}_2$ von $G=D_r$ ist also N_o/G nie normal.

7.4.3.2 $G = A_4$

Lemma (7.15): Auf $V = \mathbb{A}^3$ sei die dreidimensionale irreduzible Darstellung der Tetraedergruppe A_4 gegeben. V_0 bestehe aus den Fixpunkten der zyklischen Gruppen Z_3 . Dann gilt:

V_0/A_4 ist isomorph zur Neil'schen Parabel.

Beweis:

Es ist $k[V]^{A_4} = k[f_2, f_3, f_4, f_6, f'_6]$ (vgl. Anhang B, Teil 4).

Die Restriktion auf die Fixpunktmenge $D := \langle e_1 + e_2 + e_3 \rangle$ liefert einen Monomorphismus auf

$$k[\lambda^2, \lambda^3] \subset k[\lambda] = k[D]$$

Lemma (7.16): Auf $V = \mathbb{A}^4$ mit $k[V] = k[x, y, z, w]$ und der Basis $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ sei die Operation von A_4 durch

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho \end{pmatrix}, \quad s = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{ord } \rho = 3$$

gegeben. V_0 sei die Vereinigung der Fixpunkt Mengen der Konjugationsklasse von $\langle s \rangle$.

Dann ist V_0/A_4 nicht normal.

Beweis:

Es treten die Invarianten $(x + \rho y + \rho^2 z)w^2$ und $(x + \rho^2 y + \rho z)w$ auf. Ihre Restriktion auf

$$V^{\langle s \rangle} = \langle e_1, e_4 \rangle \quad \text{mit} \quad k[V^{\langle s \rangle}] = k[\lambda, \mu]$$

liefert $\lambda\mu, \lambda\mu^2 \in k[V_0/A_4] \subset k[\lambda, \mu]$. Weil keine linearen Invarianten existieren, ist $\mu \notin k[V_0/A_4]$, dieser Ring also nicht ganz abgeschlossen.

Die Beobachtung, daß A_4 erst ab $g=4$ als Isotropiegruppe auftritt, zeigt, daß N_0/A_4 für $G' = Z_2, Z_3$ nie normal ist, denn N enthält ab $g=4$ Summanden mit den Darstellungen ρ_3 und ρ_1 . Auf diese Summanden wird Lemma (7.15) bzw. (7.16) angewandt.

Dies ergibt die Behauptung von (7.5).a) für $G = A_4$.

7.4.3.3 $G = S_4$

Lemma (7.17): Auf $V \simeq \mathbb{A}^3$ operiere $G=S_4$ durch die dreidimensionale irreduzible Spiegelungsdarstellung. Die Vereinigung der Fixpunkt mengen der zyklischen Gruppen $\mathbb{Z}_3 < G$ hat in V/G als Bild eine Neil'sche Parabel. Das Bild der Fixpunktebenen der Spiegelungen ist ebenfalls nicht normal.

Beweis:

Es sei $k[V] = k[x,y,z]$. Der Invariantenring ist nach Anhang B, Teil 3 gleich

$$k[A,B,C] \text{ mit } A=x^2+y^2+z^2, B=x^4+y^4+z^4, C=xyz.$$

Die Restriktion der Erzeugenden auf $D:=\langle e_1+e_2+e_3 \rangle$, die Fixpunktmenge des 3-Zyklus

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

liefert als Invariantenring (vgl. Satz (7.8))

$$k[t^2, t^3] \subset k[D] = k[t].$$

Die Restriktion auf die Ebene $E = \langle e_1+e_2, e_3 \rangle$ liefert den Invariantenring des Bildes der Fixpunktebenen von Spiegelungen:

$$S := k[K, L, M] \subset k[\lambda, \mu^2] \subset k[E] = k[\lambda, \mu]$$

mit $K = \lambda^2 + 2\mu^2, L = \lambda^4 + 2\mu^4, M = \lambda\mu^2$.

Wegen

$$\lambda = \frac{2M(K^2 - 3L)}{18M^2 - K^3 + KL}$$

ist $\text{Quot } S = k(\lambda, \mu^2)$. Ferner ergibt sich

$$\lambda^4 = 4\lambda M + 2L - K^2,$$

S ist also nicht normal.

Lemma (7.18): Auf $V \simeq \mathbb{A}^2$ operiere $G = D_3$ durch

$$\alpha = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{pmatrix}, \quad t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ord } \rho = 3.$$

Das Bild der Vereinigung der Fixpunkt mengen der Involutionen ist eine Neil'sche Parabel.

Beweis:

Folgt aus Lemma (7.12) im Fall $a=3$.

Lemma (7.19): Auf $V = \mathbb{A}^5$ operiere S_4 durch die Darstellung $\rho'_3 \oplus \rho_2$, erzeugt von

$$s = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & -1 & & \\ 0 & 1 & 0 & & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & 0 & & \\ & & & \rho & 0 \\ & & & 0 & \rho^2 \end{pmatrix}$$

Das Bild der Fixpunkt Mengen der Involutionen innerhalb von A_4 in V/S_4 ist nicht normal.

Beweis:

Es sei $k[V] = k[x, y, z, u, v]$. Es ist s^2 eine solche Involution und

$$V^{<s^2>} = \langle e_1, e_4, e_5 \rangle$$

x, u, v bezeichne die Koordinatenfunktionen von $V^{<s^2>}$, also

$$k[V^{<s^2>}] = k[x, u, v]$$

Man erhält die Invarianten

$$x^2 + y^2 + z^2, u^3 + v^3, uv, (u+v)x^2 + (\rho u + \rho^2 v)y^2 + (\rho^2 u + \rho v)z^2$$

und deren Restriktionen

$$x^2, u^3 + v^3, uv, (u+v)x^2$$

auf $\langle e_1, e_2, e_3 \rangle$.

$(u+v)$ kann nicht in $k[V/S_4] \subset k[V^{<s^2>}]$ liegen, ist aber ganz über $k[x^2, u^3 + v^3, uv, (u+v)x^2]$ und im Quotientenkörper enthalten. Dies zeigt die Behauptung.

Mit diesen drei Lemmata erhält man folgende Ergebnisse für die nicht-normalen Untergruppen von S_4 :

(N_O bezeichne wie bisher die Vereinigung der Fixpunkt Mengen der jeweiligen Konjugationsklasse von Gruppen G' in $G=S_4$.)

- N_O/S_4 ist glatt für einen Nichtnormalteiler $G'=V_4$ im Fall $g=2$ und sonst immer nicht normal.

Beweis:

a) Für $g \geq 3$ enthält N einen Summanden W_2 mit der Darstellung ρ_2 .

Lemma (7.18) zeigt die Behauptung für die Gruppen Z_2 (Nicht-quadrat), V_4 (Nicht-Normalteiler), Z_4 , D_4 , weil diese Gruppen

auf W_2 wie eine zyklische Gruppe der Ordnung 2 wirken.

Weil N sogar einen Summanden mit $\rho_3' \oplus \rho_2$ enthält, ergibt sich die Behauptung für Z_2 (von Quadrat in S_4 erzeugt) nach Lemma (7.19)

- b) Ab $g=2$ tritt ein Summand W_3' mit der Spiegelungsdarstellung ρ_3' auf. Weil D_3 die gleiche Fixpunktmenge in W_3' hat wie Z_3 (vgl. 7.3.1) zeigt dies die Behauptung für die Gruppen D_3, Z_3 sowie Z_2 (von Nichtquadrat in S_4 erzeugt) mit Hilfe von Lemma (7.17). Die Glattheit von N_O/S_4 für einen Nichtnormalteiler V_4 wurde in 7.3.1 gezeigt für $g=2$ gezeigt.

Unter Beachtung von 7.3.1 ergeben sich damit alle zu betrachtenden Fälle nicht-normaler Untergruppen von $G=S_4$.

7.4.4.4 $G = A_5$

Die 5-dimensionale irreduzible Darstellung ρ_5 von A_5 entsteht durch Permutation der 6 Basiselemente eines linearen Raums, die zugehörige Permutationsdarstellung wird z.B. durch die Operation von A_5 auf den sechs 5-zähligen Ikosaederachsen realisiert. Die 5-dimensionale Darstellung erhält man durch Abspalten des trivialen 1-dimensionalen Raums. Dies ergibt die Erzeuger

$$\rho_5(S) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & 0 & 1 \\ 1 & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_5(U) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 1 & 0 & & \\ 1 & 0 & 0 & & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_5(T) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(mit Relationen wie in 3.1.5).

Die 4-dimensionale Darstellung ρ_4 von A_5 ergibt sich analog durch Betrachtung einer Permutationsdarstellung auf 5 Elementen.

$$\rho_4(S) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_4(U) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_4(T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Man erhält folgende Invarianten niedriger Grade:

- Für $\rho_5(A_5)$: Die der obigen Basiswahl angepaßten Koordinatenfunktionen seien mit x_i ($i \in I$, $I = \{0, 1, 2, 3, 4\} = \mathbb{Z}_5$) bezeichnet.

$$f_2 = 2 \cdot \sum_{\{i,j\} \subset I} x_i x_j - 5 \cdot \sum_{i \in I} x_i^2$$

$$f_3 = 50 \cdot \sum_{i \in I} x_i^3 - 15 \cdot \sum_{\{i,j\} \subset I} x_i^2 x_j + 6 \cdot \sum_{i \in I} x_i x_{i+1} x_{i+2}$$

$$f'_3 = 50 \cdot \sum_{i \in I} x_i^3 - 15 \cdot \sum_{\{i,j\} \subset I} x_i^2 x_j + 6 \cdot \sum_{i \in I} x_i x_{i+1} x_{i+3}$$

Durch Betrachtung der Poincaré-Reihe sieht man, daß dies die erzeugenden Invarianten für die Grade ≤ 3 sind.

- Für $\rho_4(A_5)$: Koordinaten entsprechend x_i ($i \in I$, $I = \{0, 1, 2, 3\} = \mathbb{Z}_4$)

$$f_2 = 2 \cdot \sum_{i \in I} x_i^2 - \sum_{\{i,j\} \subset I} x_i x_j$$

$$f_3 = 4 \sum_{i \in I} x_i^3 - 3 \sum_{\{i,j\} \subset I} x_i^2 x_j + 4 \sum_{\{i,j,k\} \subset I} x_i x_j x_k$$

$$f_4 = - \sum_{i \in I} x_i^4 + \sum_{\{i,j\} \subset I} x_i^3 x_j - \frac{3}{2} \sum_{\{i,j\} \subset I} x_i^2 x_j^2$$

$$f_4' = \sum_{\{i,j,k\} \subset I} x_i^2 x_j x_k - 3 x_1 x_2 x_3 x_4 - \frac{3}{2} \sum_{\{i,j\} \subset I} x_i^2 x_j^2$$

Es gilt $f_2^2 = - (4f_4 + 2f_4')$. Dies sind erzeugende Invarianten für die Grade ≤ 4 .

Lemma (7.20): Auf $V = \mathbb{A}^5$ operiere $G = A_5$ durch die Darstellung ρ_5 . Die Bilder der Fixpunkt Mengen der Untergruppen Z_3, D_3, Z_5, D_5 in V/A_5 sind nicht normal.

Beweis:

a) Die Fixpunkt Menge von $\langle \rho_5(S) \rangle$ ist $D := \langle e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 \rangle$. Die Restriktion der Invarianten auf D liefert nach Satz (7.8) den Invariantenring des Bildes von D in V/A_5 .

$$k[t^2, t^3] \subset k[D] = k[t]$$

Die Fixpunkt Menge von $D_5 = \langle \rho_5(S), \rho_5(U) \rangle$ stimmt mit der von $Z_5 = \langle \rho_5(S) \rangle$ überein.

b) $\rho_5(S \cdot T)$ ist ein Element der Ordnung 3 mit der Fixpunkt Menge $E = \langle e_1 + e_2 - e_3 - e_4 - e_5 \rangle$. Die Fixpunkt Menge einer $\rho_5(S \cdot T)$ enthaltenden Diedergruppe D_3 stimmt mit E überein. Restriktion der Invarianten auf E liefert wieder

$$k[t^2, t^3] \subset k[E] = k[t]$$

In beiden Fällen treten keine linearen Invarianten auf, der Invariantenring kann als nicht ganz abgeschlossen sein.

Lemma (7.21): Auf $V = \mathbb{A}^4$ operiere $G = A_4$ durch die Darstellung ρ_4 . Die Bilder der Fixpunkt Mengen der Untergruppen V_4, A_4, Z_2 in V/A_5 sind nicht normal.

Beweis:

a) $\rho_4(A_5)$ enthält die Tetraedergruppe

$$\left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 \\ & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \cong A_4$$

Die Fixpunktmenge der Vierergruppe $V_4 < A_4$ und die Fixpunktmenge von A_4 stimmen offensichtlich überein, beide sind durch

$$D := \langle e_1 + e_2 + e_3 + e_4 \rangle$$

gegeben. Die Restriktion der Invarianten f_2, f_3 liefert

$$k[t^2, t^3] \subset k[D] = k[t].$$

Wieder treten keine linearen Invarianten auf, der Invariantenring $k[D]$ kann also nicht ganz abgeschlossen sein.

b) Die Fixpunktmenge der zyklischen Gruppe

$$Z_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $F := \langle e_1 + e_2, e_3 + e_4 \rangle$. Bei entsprechender Bezeichnung der Koordinatenfunktionen ist

$$k[F] = k[\lambda, \mu]$$

und die Restriktion der Invarianten auf F ergibt

$$\bar{f}_2 = 3(\lambda^2 + \mu^2) - 4\lambda\mu, \quad 2\bar{f}_4 = -3(\lambda^4 + \mu^4) + 8\lambda\mu(\lambda^2 + \mu^2) - 12\lambda^2\mu^2$$

$$\bar{f}_3 = 6(\lambda^3 + \mu^3) + 4\lambda\mu(\lambda + \mu), \quad 2\bar{f}_4' = -3(\lambda^4 + \mu^4) + 8\lambda\mu(\lambda^2 + \mu^2) - 10\lambda^2\mu^2$$

Mit den Bezeichnungen $s = \lambda + \mu$, $p^2 = \lambda\mu$ und

$$g_2 := \bar{f}_2 = 3s^2 - 10p^2, \quad g_3 := \frac{1}{2}\bar{f}_3 = 3s^3 - 7p^2s, \quad g_4 := \bar{f}_4' - \bar{f}_4 = p^4$$

erhält man

$$R := k[g_2, g_3, g_4] \subset S$$

als Teilring des Koordinatenrings S des Bildes von F in V/G (gemäß (7.8) als Teilring von $k[F]$). R enthält alle Formen der Grade ≤ 4 in λ, μ . Wegen

$$s = - \frac{3990g_3g_4 - 16g_3g_2^2}{13g_2^3 + 3783g_2g_4 + 9g_3^2}$$

ist $k(g_2, g_3, g_4) = k(s, p^2)$. R ist nicht ganz abgeschlossen in $k(s, p^2)$:

$$p^2 \notin k[g_2, g_3, g_4] \quad \text{aber} \quad (p^2)^2 = g_4 \in R$$

Weil R alle Formen vom Grad ≤ 4 enthält, kann auch S nicht ganz abgeschlossen sein.

Damit erhält man:

N_O/A_5 ist für keine Untergruppenklasse von A_5 normal.

Beweis: N enthält von $g=5$ (erstes Auftreten von A_5) je einen Summanden mit den Darstellungen ρ_4 und ρ_5 . Damit folgt die Behauptung mit Satz (7.6) aus den Lemmata (7.20) bis (7.21).

Satz (7.5) ist damit für alle Gruppen G und G' bewiesen.

Anhang A

Lokale Eigenschaften der Quotienten der Polynomräume $P_{n,r}$ nach der Operation von G_m bzw. D

Es bezeichne

$$P_s = \{X^s + \sigma_1 X^{s-1} + \sigma_2 X^{s-2} + \dots + \sigma_{s-1} X + \sigma_s \mid \sigma_s \neq 0, \sigma_i \in k \text{ für } i=1, \dots, s\}$$

Die Polynome aus P_s werden im folgenden auch kurz mit $\underline{\sigma} = (\sigma_i)_{i=1}^s$ bezeichnet.

D sei wie in 1.1 die Erweiterung der Torusgruppe

$$G_m = \{x \mapsto cx \mid c \in k^\times\} \subset \text{PGL}_2(k)$$

mit der Involution $(x \mapsto x^{-1}) \in \text{PGL}_2(k)$.

Die endlichen Untergruppen von D sind offensichtlich zyklische Gruppen

$$\mathbb{Z}_e = \langle x \mapsto \xi x \rangle \quad (\xi \text{ primitive } e\text{-te Einheitswurzel}),$$

$$\mathbb{Z}_2 = \langle x \mapsto cx^{-1} \rangle \quad (c \in k^\times)$$

und die von diesen erzeugten Diedergruppen D_e ($|D_e| = 2e$).

Die Operation von G_m bzw. D wird wie in 1.1 durch die Wirkung auf die Nullstellen der Polynome aus P_s definiert:

Die Abbildungen

$$x \mapsto cx \quad (c \in k^\times)$$

bzw.

$$x \mapsto x^{-1}$$

induzieren

$$(\sigma_i)_{i=1}^s \mapsto (c^i \sigma_i)_{i=1}^s$$

bzw.

$$(\sigma_i)_{i=1}^s \mapsto (\sigma_{s-i} \sigma_s^{-1})_{i=1}^s$$

(wobei $\sigma_0 = 1$ gesetzt ist).

1. Bahnen und Isotropiegruppen

Weil nur der durch $\sigma_s \neq 0$ gegebene Teilraum P_s des Polynomraums betrachtet wird, haben alle G_m - bzw. D -Bahnen die Dimension 1 und sind daher abgeschlossen in P_s .

Die Isotropiegruppen $I_{\underline{\sigma}}$ von Polynomen sind endlich. In folgenden Fällen können nichttriviale Isotropiegruppen auftreten:

- a) $I_{\underline{\sigma}}$ enthält eine zyklische Gruppe $\mathbb{Z}_e = \langle x \mapsto \xi x \rangle$. Dies ist nur möglich, wenn für alle Koeffizienten

$$e \nmid i \Rightarrow \sigma_i = 0$$

gilt, das durch $\underline{\sigma}$ beschriebene Polynom also Polynom in X^e ist. Insbesondere muß gelten:

$$e \mid s$$

- b) $I_{\underline{\sigma}}$ enthält eine Involution $x \mapsto cx^{-1}$. Durch "Verschieben" von $\underline{\sigma}$ längs seiner G_m -Bahn erreicht man $\sigma_s = 1$. In diesem Fall folgt:

$$c^i \sigma_{s-i} = \sigma_i \quad (i=1, \dots, s)$$

$$\text{insbesonders} \quad c^s = \sigma_s = 1$$

c ist in diesem Fall also s -te Einheitswurzel.

Lemma (A.1): Alle Isotropiegruppen $I_{\underline{\sigma}}$ von $\underline{\sigma} \in P_s$, mit $\sigma_s = 1$, sind in

$D_s = \langle x \mapsto \xi x, x \mapsto x^{-1} \rangle$ (ξ primitive s -te Einheitswurzel) enthalten. Im allgemeinen Fall sind die Isotropiegruppen zu D_s in D konjugiert.

2. Normalenräume

Zur lokalen Untersuchung der Quotienten P_s/G_m und P_s/D wird die Operation der Isotropiegruppe $I_{\underline{\sigma}}$ auf einem $I_{\underline{\sigma}}$ -stabilen Normalenraum $N_{\underline{\sigma}}$ zur Bahn in $\underline{\sigma}$ betrachtet.

Es sei $\underline{\sigma} \in P_s$. Man kann o.E. annehmen, daß $\sigma_s = 1$ ist (dies erreicht man durch die G_m -Operation.). Dann ist der durch

$$N_{\underline{\sigma}} = \{ \underline{\sigma}' \in P_s \mid \sigma'_s = 1 \}$$

gegebene Teilraum von P_s ein Normalenraum an die D -Bahn durch $\underline{\sigma}$; ferner ist $N_{\underline{\sigma}}$ unter $I_{\underline{\sigma}}$ stabil und $I_{\underline{\sigma}}$ operiert linear auf $N_{\underline{\sigma}}$.

3. Darstellungen von Elementen der Isotropiegruppe auf $N_{\underline{\sigma}}$

- Ist $(\varepsilon : x \mapsto \xi x) \in I_{\underline{\sigma}}$ (ξ primitive e -te Einheitswurzel, $e \mid s$), so hat ε bzgl. der durch X^i gegebenen Basis eine Diagonaldarstellung auf $N_{\underline{\sigma}}$ mit den Eigenwerten ξ^i ($i=1, \dots, e-1$) und 1, die die Vielfachheit $\frac{s}{e}$ bzw. $\frac{s}{e}-1$ besitzen. (Die Operation auf dem Tangentialraum der Bahn hat den Eigenwert 1.)
- Ist $(x \mapsto x^{-1}) \in I_{\underline{\sigma}}$, so wird die Darstellung auf $N_{\underline{\sigma}}$ bezüglich der gleichen Basis durch die Matrix

$$\left\{ \begin{pmatrix} & & & 1 \\ 0 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix} \right\} \quad s-1$$

gegeben (wobei wieder $\sigma_s = 1$ vorausgesetzt wird). Diese ist diagonalisierbar mit Eigenwerten ± 1 , wobei beide Eigenwerte gleich oft, nämlich $\frac{s-1}{2}$ -mal auftreten, wenn $s-1$ gerade ist. Ist $s-1$ ungerade, so kommen die Eigenwerte -1 bzw. $+1$ mit den Vielfachheiten $\frac{s-1}{2}$ bzw. $\frac{s}{2}$ vor.

- Ist $(x \mapsto \xi x^{-1}) \in I_{\underline{Q}} (\xi^s=1)$, so hat diese Involution demnach die Darstellung

$$\left\{ \begin{pmatrix} & & \xi \\ 0 & & \xi^2 \\ & \cdot & \\ \xi^{s-1} & & 0 \end{pmatrix} \right\} \quad s-1$$

Wenn $s-1$ gerade ist erhält man wieder jeweils $\frac{s-1}{2}$ Eigenwerte $\neq 1$.

Wenn $s-1$ ungerade ist, ergeben sich $\frac{s-1}{2}$ Eigenwerte $+1$ bzw. -1 sowie ein Eigenwert $\xi^{s/2} (= \pm 1)$.

4. Die Operation der Isotropiegruppe $I_{\underline{Q}}$ auf $N_{\underline{Q}}$

Lemma (A.2):

a) $I_{\underline{Q}}$ sei zyklisch: $I_{\underline{Q}} = \langle x \mapsto \xi x \rangle$ (ξ primitive e -te Einheitswurzel)

$I_{\underline{Q}}$ operiert genau dann als Spiegelungsgruppe auf $N_{\underline{Q}}$, wenn

$$s = 2 \text{ und } I_{\underline{Q}} \simeq Z_2$$

b) $I_{\underline{Q}} = \langle x \mapsto \xi x^{-1} \rangle \simeq Z_2$ ($\xi^s=1$). In diesem Fall gilt:

$I_{\underline{Q}}$ ist genau dann Spiegelungsgruppe, wenn

$$s \in \{2, 3\} \text{ oder } s=4 \text{ und } \xi=-1$$

c) $I_{\underline{Q}}$ sei eine Diedergruppe:

$I_{\underline{Q}}$ operiert in folgenden Fällen als Spiegelungsgruppe auf $N_{\underline{Q}}$:

$$I_{\underline{Q}} = D_3 \text{ und } s=3$$

$$I_{\underline{Q}} = V_4 \text{ und } s \in \{2, 4\}$$

(Bemerkung: Im Fall $s=4$ sind zwei Darstellungen von Vierergruppen möglich, von denen nur eine als volle Isotropiegruppe auftritt, letztere operiert als Spiegelungsgruppe.)

Beweis:

a) und b) ergibt sich unmittelbar aus 3.

c) Ist $s > 4$, so treten überhaupt keine Spiegelungen auf.

Es bleiben die Fälle $s \in \{2, 3, 4\}$:

$s=2$: Wegen $\dim N_{\underline{Q}} = 1$ können nur Spiegelungen auftreten.

$s=3$: Die einzige mögliche Diedergruppe ist $D_3 = \langle x \mapsto \rho x, x \mapsto x^{-1} \rangle$ (ρ primitive dritte Einheitswurzel). Alle Involutionen $x \mapsto \rho^i x^{-1}$ ($i=0,1,2$) sind Spiegelungen (vgl. 3.) und erzeugen D_3 .

$s=4$: $D_4 = \langle x \mapsto ix, x \mapsto x^{-1} \rangle$ (i vierte primitive Einheitswurzel) enthält nur die Spiegelungen $x \mapsto x^{-1}$ und $x \mapsto -x^{-1}$ (vgl. 3.), ist also nicht von Spiegelungen erzeugt. $V_4 = \langle x \mapsto -x^{-1}, x \mapsto x^{-1} \rangle$ ist Spiegelungsgruppe. Die zweite mögliche Vierergruppe enthält die Involutionen $x \mapsto -x$ und $x \mapsto -ix^{-1}$. Für ein Polynom $X^4 + aX^3 + bX^2 + cX + d$, dessen

Isotropiegruppe diese Involutionen enthält, folgt $a=b=c=0$. Die volle Isotropiegruppe ist also D_4 .

5. Singularitäten von $P_{s/D}$ und P_{s/G_m}

Lemma (A.3):

- a) P_{s/G_m} ist für $s=2$ glatt und für $s>2$ genau in den Punkten singulär, die Polynomen aus P_s mit nichttrivialer Isotropiegruppe entsprechen
- b) $P_{s/D}$ ist für $s=2,3$ glatt. Für $s=4$ ist $P_{s/D}$ genau in den Bildpunkten der Bahnen von Polynomen X^4+aX^3+cX+1 mit $a^2+c^2=0$ singulär. Für $s>4$ entsprechen die Singularitäten genau den Polynomen mit nichttrivialen Isotropiegruppen.

Beweis:

Es bezeichne G die Gruppen G_m bzw. D . $\underline{\sigma}$ sei ein Element von P_s , o.E. wird wieder $\sigma_s=1$ angenommen. I bezeichne die Isotropiegruppe und N den wie oben gewählten Normalenraum.

Wie in Kap.6 zeigt man mit Hilfe des Fundamentallemmas von Luna die Existenz eines natürlichen Morphismus

$$N/I \longrightarrow P_{s/G}$$

der in einer Umgebung des Bildes von $\underline{\sigma}$ in N/I étale ist. Es genügt also, den Quotienten von N nach I zu untersuchen.

a) $G=G_m$:

$$s=2: P_s = \{X^2 + aX + b \mid a, b \in k, b \neq 0\}$$

Die Quotientenabbildung wird durch a^2b^{-1} gegeben: $P_{s/G_m} \simeq k$

$s>2$: Für $I = \{1\}$ ist der Quotient glatt, in allen Fällen nichttrivialer Isotropiegruppen operieren diese nicht als Spiegelungsgruppen (vgl. A.2,a)), der Quotient ist also singulär (vgl. Beweis von (7.1),c)).

b) $G=D$:

s=2: Der Quotient nach D stimmt mit dem nach G_m überein.

$$s=3: P_3 = \{X^3 + aX^2 + bX + c \mid a, b, c \in k, c \neq 0\}$$

Alle nichttrivialen Isotropiegruppen mit Ausnahme von $Z_3 = \langle x + \rho x \rangle$ (ρ primitive dritte Einheitswurzel) sind Spiegelungsgruppen.

(Vgl.A.2). Z_3 kann nur auftreten, wenn $a=b=0$ ist. In diesem Fall ist die volle Isotropiegruppe D_3 , also Spiegelungsgruppe.

$$s=4: P_4 = \{X^4 + \sigma_1 X^3 + \sigma_2 X^2 + \sigma_3 X + \sigma_4 \mid \sigma_i \in k \text{ für } i=1, \dots, 4, \sigma_4 \neq 0\}$$

Ist $I \cap G_m \neq 1$, so muß $x \mapsto -x$ in I enthalten sein. Dies führt zu $\sigma_1 = \sigma_3 = 0$ und $I = \langle x \mapsto -x, x \mapsto x^{-1} \rangle$ oder sogar $I = \langle x \mapsto ix, x \mapsto x^{-1} \rangle$

(mit einer vierten Einheitswurzel i). Im ersten Fall ist I Spiegelungsgruppe, der zweite gehört zu der angegebenen Menge von Polynomen mit singulären Bildpunkten.

Ist $I = \langle x \mapsto i^k x^{-1} \rangle$, so ist I genau für $k=1,3$ keine Spiegelungsgruppe. Das Auftreten dieser Involutionen liefert die Gleichungen

$$\sigma_4 = 1 \quad \text{und} \quad \sigma_3 = (\pm i)\sigma_1,$$

also die angegebene Beziehung.

s>4: I kann nach Lemma A.2 keine Spiegelungsgruppe sein.

6. Übergang zu den Räumen $P_{n,r}$

Ersetzt man bei den Polynomen aus $P_{n,r}$ (vgl. 1.1) X^r durch X , so induziert dies eine Einbettung

$$P_{n,r} \hookrightarrow P_s$$

($s = \frac{n}{r}$), deren Bild aus den separablen Polynomen von P_s besteht.

Die in 1.1 definierte Operation von D auf $P_{n,r}$ ist durch

$$(x \mapsto cx, \sum_{i=0}^n \sigma_i X^{n-i}) \mapsto (\sum_{i=0}^n c^i \sigma_i X^{n-i}) \text{ und}$$

$$(x \mapsto x^{-1}, \sum_{i=0}^n \sigma_i X^{n-i}) \mapsto \sum_{i=0}^n \sigma_{n-i} \sigma_n^{-1} X^{n-i} \text{ gegeben. Sie stimmt mit}$$

der von P_s vermöge der obigen Einbettung induzierten Operation bis auf den Übergang von c zu c^r überein. Die Bahnen sind also für algebraisch abgeschlossene Körper k identisch, die Quotienten sind isomorph. Die Aussagen von Lemma A.3 können also mit Hilfe dieser Einbettung auf die Räume $P_{n,r}$ übertragen werden wobei die Gruppe Z_r die Rolle der trivialen Isotropiegruppe übernimmt.

Anhang B

E i n i g e Q u o t i e n t e n

1.) Auf $P_3 = \{X^3 + aX^2 + bX + c \mid c \neq 0, a, b, c \in k^x\}$ wird die Operation der Gruppe D (vgl. 1.1 bzw. Anhang A) betrachtet.

Lemma (B.1): Der Quotient wird durch

$$\begin{aligned} \phi: P_3 &\longrightarrow \mathbb{A}^2 \\ (a, b, c) &\longmapsto \left(\frac{a^3}{c} + \frac{b^3}{c^2}, \frac{ab}{c} \right) \end{aligned}$$

gegeben.

Beweis: Zunächst wird gezeigt, daß der Quotient der Operation des Torus G_m durch

$$\begin{aligned} \phi_1: P_3 &\longrightarrow X = V(xy - z^3) \subset \mathbb{A}^3 \\ (a, b, c) &\longmapsto (x, y, z) = (a^3 c^{-1}, b^3 c^{-2}, abc^{-1}) \end{aligned}$$

gegeben wird. ϕ_1 ist G_m -äquivariant. P_3 hat den Koordinatenring $k[a, b, c, c^{-1}]$, seine G_m -Invarianten werden von G_m -invarianten Monomen erzeugt. Durch Induktion sieht man, daß $a^3 c^{-1}, b^3 c^{-2}, abc^{-1}$ diese Monome erzeugen. Der Invariantenring der G_m -Operation ist also $k[a^3 c^{-1}, b^3 c^{-2}, abc^{-1}]$. Er ist zu $R = k[x, y, z] / (xy - z^3)$ isomorph.

D induziert auf $R = k[\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}]$ mit $\tilde{z}^3 = \tilde{x}\tilde{y}$ die durch

$$\tilde{i}_{\tilde{x}} = \tilde{y}, \quad \tilde{i}_{\tilde{y}} = \tilde{x} \quad \text{und} \quad \tilde{i}_{\tilde{z}} = \tilde{z}$$

gegebene Involution. Der Ring $R_0 = k[\tilde{x} + \tilde{y}, \tilde{z}]$ ist als Polynomring ganz abgeschlossen, er ist i -invariant und $\tilde{x}, \tilde{y}$ sind Lösungen der quadratischen Gleichung

$$T^2 - (\tilde{x} + \tilde{y})T + \tilde{z}^3 = 0.$$

Also ist R_0 der Invariantenring von D.

2. Der Quotient von A^3 nach der der Diedergruppe D_4 , erzeugt von der Darstellung $\rho_1 \oplus \rho_{10}$

Es ist

$$D_4 = \left\langle \begin{pmatrix} i & \\ & -i \\ & & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Der Quotient wird gegeben durch

$$S = k[x^4 + y^4, z^2, xy, (x^2 + y^2)z] \subset R = k[x, y, z]$$

(mit $A^3 = Sp \ m \ R$).

Beweis: D_4 sei mit G bezeichnet.

i) $S \subset R^G$ ist klar.

ii) $a = x^4 + y^4$, $b = z^2$, $c = xy$ sind algebraisch unabhängig (Berechnung der Differentiale).

iii) Es ist $[(x^2 + y^2)z]^2 = (a+c)b$, also ist S ganz abgeschlossen.

Dies zeigt die Normalität von $Sp \ m \ S$.

$$\begin{aligned} \text{Es gilt } (x+y)^4 &= x^4 + y^4 \pm 4xy(x^2 + y^2) + 6(xy)^2 \\ (x^2 + y^2)^2 &= x^4 + y^4 + 2(xy)^2 \end{aligned}$$

also sind x, y ganz über S , für z ist dies klar.

Dies ergibt mit dem Quotientenkriterium in [K2], S.112, die Behauptung.

3. Der Quotient von A^3 nach der 3-dimensionalen Spiegelungsdarstellung der Oktaedergruppe

S_4 wird erzeugt von

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Der Quotient wird durch

$$k[A, B, C] \subset k[x, y, z]$$

mit $A = x^2 + y^2 + z^2$, $B = x^4 + y^4 + z^4$, $C = xyz$ gegeben.

Beweis: A,B,C sind algebraisch unabhängig, insbesondere ist $k[A,B,C]$ ganz abgeschlossen. Durch Berechnung der Potenzen von $x \pm y \pm z$ zeigt man, daß $k[x,y,z]$ ganz über $k[A,B,C]$ ist. Der zugehörige Morphismus ist also endlich und induziert die Quotientenabbildung.

4. Der Quotient von A^3 nach der irreduziblen 3-dimensionalen Darstellung von A_4

Es bezeichne $S=k[x,y,z]$ den Koordinatenring von A^3 . A_4 wird erzeugt von

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Die dreidimensionale Spiegelungsdarstellung von S_4 wird über A_4 von

$$i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

erzeugt. Offensichtlich sind

$$\begin{aligned} f_2 &= x^2 + y^2 + z^2, & f_3 &= xyz, & f_4 &= x^4 + y^4 + z^4 \\ \text{sowie} & & & & & \\ f_6 &= x^2 y^4 + y^2 z^4 + z^2 x^4, & f'_6 &= x^4 y^2 + y^4 z^2 + z^4 x^2 \end{aligned}$$

Invarianten von A_4 . In 3. wurde gezeigt, daß

$$S^4 = k[f_2, f_3, f_4]$$

Ferner ist $f_2 + f'_6$ eine S_4 -Invariante. Weiter sieht man, daß die Spiegelungshyperebenen von S_4 eine 6-elementige Bahn O bilden, die zugehörigen Linearformen sind

$$x \pm y, x \pm z, y \pm z.$$

Die zugehörige binäre Form $f_0 = (x+y)(x-y)(x-z)(x+z)(y-z)(y+z) = f_6 - f'_6$ ist S_4 -Semiinvariante und nach Springer ([S2], S.85) gilt sogar:

Jede Semiinvariante von S_4 ist von der Form $f_0 g$, $g \in S^4$.

Jetzt wird gezeigt:

$$\text{Mit } f \in S^{A_4} \text{ ist auch } i f \in S^{A_4}.$$

Beweis: $g i_f = i g' f$, wegen $g i = i g'$ mit $g' \in A_4$, weil A_4 Normalteiler von S_4 ist.

Also ist $\frac{1}{2}(f+i f)$ eine S_4 -Invariante und $\frac{1}{2}(f-i f)$ eine S_4 -Semiinvariante mit Eigenwert -1 oder gleich Null, falls f sogar S_4 -Invariante ist.

Für alle $f \in S^A_4 \setminus S^{S_4}$ ist $\frac{1}{2}(f-i f) = (f_6 - f'_6) g$, $g \in S_4$.

Also gilt

$$f = \frac{1}{2}(f - i f) + \underbrace{\frac{1}{2}(f + i f)}_{=: h \in S_4} = (f_6 - f'_6) g + h$$

$$\Rightarrow f \in k[f_2, f_3, f_4, f_6, f'_6]$$

Zusammengefaßt:

Es ist $S^A_4 = k[f_2, f_3, f_4, f_6, f'_6]$ mit der Relation

$$2(f_6 + f'_6) = f_2 f_4 - f_2^3 + 6f_3^2$$

Anhang CCharaktertafeln der Polyedergruppen A_4, S_4, A_5

Die Bezeichnung der Charaktere wird entsprechend den Bezeichnungen der irreduziblen Darstellungen in 5.3.4 und 5.3.5 gewählt.

1. Tetraedergruppe A_4

	A_4 ω	$(\omega^2)^{A_4}$	Involutionen	1
χ_3	0	0	-1	3
χ_1	ρ	ρ^2	1	1
$\bar{\chi}_1$	ρ^2	ρ	1	1
χ_0	1	1	1	1

ω bezeichne ein Element der Ordnung 3. ω und ω^2 sind Repräsentanten der beiden Konjugationsklassen. ρ sei primitive 3. Einheitswurzel.

2. Oktaedergruppe S_4

	Ordnung 4	Ordnung 3	Elemente von $V_4 \triangleleft S_4$	Involutionen außerhalb $V_4 \triangleleft S_4$	1
χ_3	1	0	-1	-1	3
χ'_3	-1	0	-1	1	3
χ_2	0	-1	2	0	2
χ_1	-1	1	1	-1	1
χ_0	1	1	1	1	1

3. Ikosaedergruppe A_5

λ bezeichne ein Element der Ordnung 5, die beiden Konjugationsklassen haben also die Repräsentanten λ, λ^2 . ϵ sei primitive 5. Einheitswurzel.

	A_5 λ	$(\lambda^2)^{A_5}$	Elemente der Ordnung 3	Involutionen	1
χ_5	0	0	-1	1	5
χ_4	-1	-1	1	0	4
χ_3	$1+\epsilon^2+\epsilon^3$	$1+\epsilon+\epsilon^4$	0	-1	3
χ'_3	$1+\epsilon+\epsilon^4$	$1+\epsilon^2+\epsilon^3$	0	-1	3
χ_0	1	1	1	1	1

L i t e r a t u r v e r z e i c h n i s

- [B] E.Brieskorn, Sur les groupes de tresses,
Séminaire Bourbaki, Springer Lecture Notes 317 (1973), S.21-44
- [Br] R.Brandt, Über Automorphismengruppen von hyperelliptischen
Funktionskörpern, Diplomarbeit an der Universität-Essen-GHS
Februar 1985
- [F] I.Fischer, The Moduli of Hyperelliptic Curves,
Trans.of the Am.Math.Soc. 82 (1956), S.64-84
- [G] W.D.Geyer, Invarianten binärer Formen,
Springer Lecture Notes 412 (1974), S.36-69
- [II] J.Igusa, Arithmetic Variety of Moduli for Genus Two
Ann.of Math. 72(1960), S.612-649
- [I2] W.Ingrisch, Automorphismengruppen hyperelliptischer Kurven
vom Geschlecht 3, Zulassungsarbeit an der Friedrich-Alexander-
Universität Erlangen-Nürnberg, 1976
- [K1] F.Klein, Vorlesungen über das Ikosaeder,
Teubner, Leipzig 1884
- [K2] H.Kraft, Geometrische Methoden in der Invariantentheorie
Vieweg, Braunschweig, 1985
- [L] D.Luna, Slices étales,
Bull.Soc.Math.France, Suppl.Mém.33 (1973), S 81-105
- [M] D.Mumford, Introduction to Algebraic Geometry
Harvard Notes
- [N] P.E.Newstead, Introduction to Moduli Problems and Orbit Spaces,
Tata Institute of Fundamental Research, Bombay,
Springer Verlag, Berlin, New York 1978
- [P] H.Popp, Stratifikationen von Quotientenmannigfaltigkeiten (in
Charakteristik 0) und insbesondere der Modulmannigfaltigkeit
für Kurven, Journal für reine und angewandte Mathematik, Bd.250
(1971), S.12-44
- [S1] J.P.Serre, Représentations linéaires des groupes finis
Hermann, Paris 1967

- [S2] T.H.Springer, Invariant Theory
Springer, Lecture Notes 585 (1977)
- [S3] T.Shioda, On the Graded Ring of Invariants of Binary Octavics
Amer.J.Math.89 (1967), S.1022- 1046
- [W] Weyl, Symmetry
Princeton University Press, 1952

Lebenslauf

Geboren am 10.8.1952 in Nürnberg, katholisch

Eltern: Günther Ingrisch, Gymnasiallehrer und
Marianne Ingrisch, geb. Döring

Schulen: - Grundschule Neustadt/Aisch vom September 1958 bis Juli 1962
- Friedrich-Alexander-Gymnasium Neustadt/Aisch (mathematisch-naturwissenschaftlich) vom September 1962 bis Juni 1971
- (ferner: Wintersemester 1969 am Richard Taunton's College in Southampton, England)

Studium und zweite Staatsprüfung:

- Studium der Fächer Mathematik und Physik an der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg von 1971 bis 1976
- Vordiplom in Mathematik am 9.11.1973
- Wissenschaftliche Prüfung für das Lehramt an Gymnasien im Herbst 1976
- von 1973 bis 1977 Tätigkeit als studentische/wissenschaftliche Hilfskraft am Mathematischen Institut
- Referendarausbildung und pädagogische Prüfung von 1977 bis Februar 1979 am Seminar des Emil-von-Behring-Gymnasiums, Spardorf.

Familienstand:

Verheiratet seit 1977 mit Krimhilde Ingrisch, geb. Thill, drei Kinder.

Berufliche Tätigkeit:

Dienstantritt am Georg-Wilhelm-Steller-Gymnasium in Bad Windsheim als Studienrat z.A. im Februar 1979. Unterrichtet in den Fächern Mathematik und Physik. Neben der Unterrichtstätigkeit zuständig für die Betreuung der physikalischen Sammlung und die Rechnerausstattung der Schule.



Klaus Feller
Marquardstr. 21

8520 Erlangen
Tel.: 091 31 / 24 220